

V koolimatemaatika olümpiaad

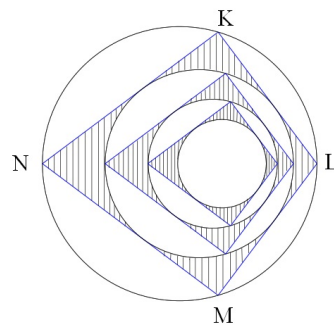
10. mail 2025 kell 10.00-15.00

Lahendamiseks on aega on 5 tundi.

Ülesande lahendamise eest saadav maksimaalne võimalik punktiarv on toodud ülesande teksti alguses.

Palun kirjuta iga ülesande lahendus eraldi lehele ja märgi iga lehe ülemisse serva sulle antud kood ja ülesande number!

- (10 punkti) Auto esirehvid peavad vastu 15000 km, tagumised 25000 km. Kui pika sõidu järel tuleks rehve omavahel vahetada, et kokku saaks samade rehvidega sõita kõige pikema maa?
- (15 punkti) Nelja sõbra majad asuvad punktides $A(9; 1)$, $B(23; 4)$, $C(29; 16)$ ja $D(1; 15)$. Kuhu tuleks ehitada viienda sõbra maja, et sellest majast kauguste summa kõigi ülejäänud majadeni oleks minimaalne?
- (15 punkti) Leida võrrandi $\sqrt[4]{\frac{2025x}{9+x}} + 36\sqrt{\frac{9+x}{2025x}} = 7$ kõik lahendid.
- (20 punkti) Piirkonnas $\frac{1}{16c^4+1} \leq x \leq 1$ antud funktsiooni $y = \frac{1-x}{c^2x}$ graafikuks olev joon pöörleb ümber y -telje. Leida parameetri c selline väärtus, mille korral tekkiva pöördkeha ruumala on suurim.
- (20 punkti) Postimüügifirmast on tellitud 7 pakki. Iga paki saaja võib teistest sõltumatult valida oma paki kohaletoimetamiseks ühe kullerfirma. Võrdse tõenäosusega on võimalik valida nelja erineva kullerteenuse pakkuja vahelt. Kui suur on tõenäosus, et igaüks neljast kullerfirmast saab vähemalt ühe paki kohale viia?
- (20 punkti) Nelinurga $KLMN$ tipud asuvad ringjoonel ja selle nelinurga külgede pikkused on $KL = LM = 3$ ning $MN = NK = 4$. Selle nelinurga sisse on joonestatud maksimaalne ringjoon ning nelinurga ja sisemise ringjoone vaheline ala on viirutatud. Seejärel on sisemise ringjoone sisse kujundatud nelinurgaga $KLMN$ sarnane nelinurk nii, et uue nelinurga tipud asuvad sisemisel ringjoonel. Selle nelinurga sisse on jällegi joonestatud maksimaalne ringjoon ning nelinurga ja ringjoone vahele jääv ala on viirutatud. Joonisel on kujutatud kolm esimest niimoodi saadud nelinurka. Sama protsessi korratakse lõpmatult. Leida kõigi nii tekkivate viirutatud alade pindalade summa.



Lahendused

Ülesande 1 lahendus (ülesande autor Evald Übi).

Pikim sõit tuleb siis, kui kõik neli rehvi on korraga ära kulunud. Algul ees ja pärast taga olnud rehvi läbisõit peab võrduma algul taga ja pärast ees olnud rehvi läbisõiduga.

Tagarehv on x km järel kulunud $\frac{x}{25000}$ osa ehk jääk on $1 - \frac{x}{25000}$ ja sellega saab sõita ees veel

$$\left(1 - \frac{x}{25000}\right)15000 = \left(15000 - \frac{3x}{5}\right) \quad (\text{km}).$$

Esirehv on x km järel kulunud $\frac{x}{15000}$ osa, jääk $1 - \frac{x}{15000}$, sellega saab taga sõita veel

$$\left(1 - \frac{x}{15000}\right)25000 = \left(25000 - \frac{5x}{3}\right) \quad (\text{km}).$$

Need kaks avaldist peavad võrduma:

$$15000 - \frac{3x}{5} = 25000 - \frac{5x}{3},$$

millest

$$\begin{aligned}\frac{5x}{3} - \frac{3x}{5} &= 10000 \\ \frac{16x}{15} &= 10000 \\ x &= 9375.\end{aligned}$$

Pärast rehvide vahetust saab sõita taga olnud rehviga $15000 - 3\left(\frac{9375}{5}\right) = 15000 - 5625 = 9375$ km. Seega saab maksimaalselt sõita $2 \cdot 9375 = 18750$ km, vahetada tuleb peale 9375 km läbimist.

Lahendusvariant 2. Olgu esirataste all olnud rehvid sõitnud x km, seejärel vahetatakse nad tagumisteks ja sõita saab veel y km. Esirataste rehvid kuluvad iga kilomeetriga $\frac{1}{15000}$ osa, tagarataste omad iga kilomeetriga $\frac{1}{25000}$ osa. Rehvid on lõpuni kulunud, kui kulumiste summa on 1. Seega

$$x \cdot \frac{1}{15000} + y \cdot \frac{1}{25000} = 1.$$

Et rehve maksimaalselt ära kasutada, siis peab kehtima ka vastupidi: kui rehvid on x km olnud tagaratastel ja y km esiratastel, peab kulumiste summa olema samuti 1:

$$x \cdot \frac{1}{25000} + y \cdot \frac{1}{15000} = 1.$$

Peame lahendama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x \cdot \frac{1}{15000} + y \cdot \frac{1}{25000} = 1, \\ x \cdot \frac{1}{25000} + y \cdot \frac{1}{15000} = 1. \end{cases}$$

Korrutame esimest võrrandit 225000-ga ja teist võrrandit 375000-ga:

$$\begin{cases} 15x + 9y = 225000 \\ 15x + 25y = 375000 \end{cases}$$

ning lahutame teisest võrrandist esimese: $16y = 150000$, millest $y = 9375$. Siis $x = 15000\left(1 - \frac{9375}{25000}\right) = 9375$.

Vastus: rehve tuleks vahetada tuleks peale 9375 km läbimist.

Ülesande 2 lahendus (ülesande autor Evald Übi).

Kui kanname joonisele punktid A, B, C, D , siis näeme, et nelja sõbra majad asuvad kumera nelinurga $ABCD$ tippudes.

Olgu viienda sõbra maja asukoht punktis E . Kauguste summa sellest majast majadeni punktides A ja C on võrdne kolmnurga ACE kahe külje AE ja CE pikkuste summaga. Kolmnurga võrratuse tõttu on see alati suurem või võrdne kolmnurga kolmanda külje pikkusega: $AE + CE \geq AC$, kusjuures võrdus kehtib ainult juhul, kui kolmnurk ei olegi kolmnurk, vaid punkt E asub küljel AC . Seega kauguste EA ja EC summa oleks minimaalne juhul, kui punkt E asuks lõigul AC .

Analoogiliselt: Kauguste summa majast E majadeni punktides B ja D on võrdne kolmnurga BDE kahe külje pikkuste summaga. Kolmnurga võrratuse tõttu ei ole see kunagi väiksem kolmnurga kolmanda külje pikkusest. Seega kauguste EB ja ED summa oleks minimaalne juhul, kui punkt E asuks lõigul BD .

Selleks, et summa $EA + EB + EC + ED$ oleks minimaalne, tuleb maja E ehitada lõikude AC ja BD lõikepunkti.

Leiame sirge läbi punktide A ja C . Kuna $A(9; 1)$ ja $C(29; 16)$, siis sellise sirge võrrandiks on

$$\frac{x-9}{29-9} = \frac{y-1}{16-1} \quad \text{ehk} \quad \frac{x-9}{20} = \frac{y-1}{15} \quad \text{ehk} \quad 20(y-1) = 15(x-9) \quad \text{ehk}$$

$$4(y-1) = 3(x-9) \quad \text{ehk} \quad 4y = 3x - 23.$$

Analoogiliselt leiame sirge läbi punktide $B(23; 4)$ ja $D(1; 15)$:

$$\frac{x-23}{1-23} = \frac{y-4}{15-4} \quad \text{ehk} \quad \frac{x-23}{-22} = \frac{y-4}{11} \quad \text{ehk} \quad 11(x-23) = -22(y-4) \quad \text{ehk}$$

$$(x-23) = -2(y-4) \quad \text{ehk} \quad x = 23 - 2y + 8 \quad \text{ehk} \quad x = 31 - 2y.$$

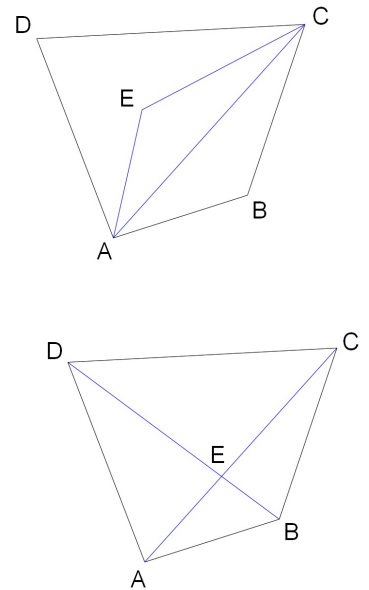
Kahe sirge lõikepunkti leidmiseks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4y = 3x - 23 \\ x = 31 - 2y \end{cases} \Rightarrow 4y = 3(31 - 2y) - 23,$$

millest saame $4y = 93 - 6y - 23$ ehk $10y = 70$, millest $y = 7$. Ja teise sirge võrrandist leiame

$$x = 31 - 2 \cdot 7 = 31 - 14 = 17.$$

Vastus: viienda sõbra maja tuleb ehitada punkti koordinaatidega $(17; 7)$.



Ülesande 3 lahendus (ülesande autor Ants Aasma).

Tähistame $\sqrt[4]{\frac{2025x}{9+x}} = y$. Siis $\sqrt{\frac{9+x}{2025x}} = \frac{1}{y^2}$ ja y peab olema mittenegatiivne. Saame uue võrrandi

$$y + \frac{36}{y^2} = 7 \quad \text{ehk} \quad y^3 + 36 = 7y^2 \quad \text{ehk} \quad y^3 - 7y^2 + 36 = 0.$$

Tegurdame:

$$y^3 - 7y^2 + 36 = y^3 - 6y^2 - y^2 + 36 = y^2(y-6) - (y^2-36) = y^2(y-6) - (y+6)(y-6) = (y-6)(y^2-y-6),$$

seega üheks lahendiks on $y = 6$ ja ülejäänud lahendite saamiseks peab

$$y^2 - y - 6 = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahenditeks on

$$y = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Kuna y peab olema mittenegatiivne, siis sobib ainult $y = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$. Seega on y võimalikud väärtused $y_1 = 6$ ja $y_2 = 3$.

Leiame neile vastavad x väärtused. Kui $y = 6$, siis

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{2025x}{9+x}} = 6 & \quad \Big| \quad ()^4 \\ \frac{2025x}{9+x} = 1296 & \quad \Big| \cdot (9+x) \\ 2025x = 11664 + 1296x, \end{aligned}$$

millest

$$x = \frac{11664}{729} = 16.$$

Kui $y = 3$, siis

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{2025x}{9+x}} = 3 & \quad \Big| \quad ()^4 \\ \frac{2025x}{9+x} = 81 & \quad \Big| \cdot (9+x) \\ 2025x = 729 + 81x, \end{aligned}$$

millest

$$x = \frac{729}{1944} = \frac{3}{8}.$$

Vastus: $x = 16$ või $x = \frac{3}{8}$.

Ülesande 4 lahendus (ülesande autor Liivi Kluge).

Kui piirkonnas $a \leq x \leq b$ antud joon võrrandiga $y = f(x)$ pöörleb ümber x -telje, siis tekkiva pöördkeha ruumala on leitav vastavalt valemile $V = \pi \int_a^b y^2 dx$. Meil pöörleb joon ümber y -telje. Kui joone võrrand oleks antud kujul $x = f(y)$, siis tekkiva pöördkeha ruumala oleks leitav kui $V = \pi \int_a^b x^2 dy$, kus $[a; b]$ on y väärtuste piirkond.

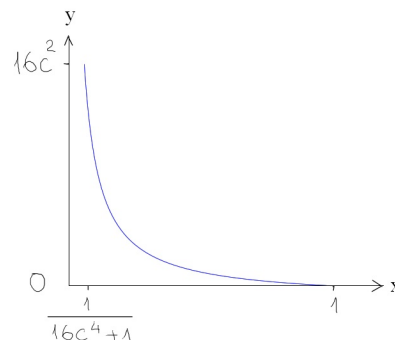
Vaatleme funktsiooni $y = \frac{1-x}{c^2 x}$ hoopis x funktsioonina y -st. Iga parameetri c etteantud väärtuse korral saame ühe fikseeritud joone. Avaldame

$$y = \frac{1-x}{c^2 x} \Rightarrow c^2 xy = 1-x \Rightarrow x(c^2 y + 1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{c^2 y + 1}.$$

Lõigul $x \in [\frac{1}{16c^4+1}; 1]$ on tegemist monotoonselt kahaneva funktsiooniga. Kui $x = 1$, siis $y = 0$, kui $x = \frac{1}{16c^4+1}$, siis

$$y = \frac{1 - \frac{1}{16c^4+1}}{c^2 \frac{1}{16c^4+1}} = \frac{16c^4 + 1 - 1}{c^2} = 16c^2.$$

Seega meie joone korral $0 \leq y \leq 16c^2$.



Leiame vastavalt toodud valemile pöördkeha ruumala:

$$V = \pi \int_0^{16c^2} \left(\frac{1}{c^2 y + 1} \right)^2 dy = \pi \int_0^{16c^2} \frac{1}{(c^2 y + 1)^2} dy = \pi \int_0^{16c^2} (c^2 y + 1)^{-2} dy$$

Integreerimiseks kasutame muutujavahetust $t = c^2 y + 1$. Funktsioon $t = f(y)$ on monotoonselt kasvav lineaarne funktsioon. Leiame $dt = c^2 dy$, millest $dy = \frac{1}{c^2} dt$, ning kui $y = 0$, siis $t = c^2 \cdot 0 + 1 = 1$ ja kui $y = 16c^2$, siis $t = c^2 \cdot 16c^2 + 1 = 16c^4 + 1$. Peale muutujavahetust saame

$$V = \pi \int_1^{16c^4+1} t^{-2} \frac{1}{c^2} dt = \frac{\pi}{c^2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} \Big|_1^{16c^4+1} = \frac{\pi}{c^2} \left(\frac{1}{-(16c^4+1)} - \frac{1}{-1} \right) = \frac{\pi}{c^2} \cdot \frac{-1 + 16c^4 + 1}{16c^4 + 1} = \frac{16\pi c^2}{16c^4 + 1}.$$

Seega oleme saanud seose, kuidas tekkiva pöördkeha ruumala V sõltub parameetrist c . Leiame saadud funktsioonist $V = f(c)$ tuletise (parameetri c järgi):

$$\begin{aligned} V' &= \left(\frac{16\pi c^2}{16c^4 + 1} \right)' = 16\pi \cdot \frac{2c \cdot (16c^4 + 1) - c^2 \cdot 16 \cdot 4c^3}{(16c^4 + 1)^2} = 16\pi \frac{2 \cdot 16c^5 + 2c - 4 \cdot 16c^5}{(16c^4 + 1)^2} = \\ &= 16\pi \frac{2c - 32c^5}{(16c^4 + 1)^2} = 32\pi \frac{c(1 - 16c^4)}{(16c^4 + 1)^2} = 32\pi \frac{c(1 - 4c^2)(1 + 4c^2)}{(16c^4 + 1)^2} = 32\pi \frac{c(1 - 2c)(1 + 2c)(1 + 4c^2)}{(16c^4 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Leiame funktsiooni V kriitilised punktid: $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$ ja $c = -\frac{1}{2}$. Kontrollimisel selgub, et punktis $c = 0$ on ruumala miinimum ($V = 0$), punktides $c = \pm \frac{1}{2}$ on maksimum ($V = 2\pi$).

Vastus: pöördkeha ruumala on maksimaalne, kui parameetri c väärtuseks on $\pm \frac{1}{2}$.

Ülesande 5 lahendus (ülesande autor Alar Leibak).

Uurime, millistel viisidel saab üldse 7 pakki 4 kullerfirma vahel jagada. Jätame esialgu vaatluse alt välja, milliseid pakke jagatakse ja leiame ainult kõik erinevad võimalused pakkide arvude jaoks, mida iga firma peab kohale viima. Leiame kõik viisid, kuidas arvu 7 (kõik pakid tuleb kohale toimetada) saaks jagada nelja mittenegatiivse täisarvu (mitu pakki igaüks firmadest kohale viib) summaks. Kui liidetavate järjekord ei ole oluline, siis erinevad võimalused on:

$$\begin{array}{cccc} 7 & + & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 6 & + & 1 & + & 0 & + & 0 \\ 5 & + & 2 & + & 0 & + & 0 \\ 5 & + & 1 & + & 1 & + & 0 \\ 4 & + & 3 & + & 0 & + & 0 \\ 4 & + & 2 & + & 1 & + & 0 \\ 4 & + & 1 & + & 1 & + & 1 \\ 3 & + & 2 & + & 2 & + & 0 \\ 3 & + & 2 & + & 1 & + & 1 \\ 2 & + & 2 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Ülesande tingimustele vastavad soodsad variandid on nende hulgast sellised, kus ükski firma ei jää ilma pakita. Kui jätame välja võimalused, kus mõni liidetavatest on null (st näiteks võimalus $7 + 0 + 0 + 0$ ei sobi), siis alles jäävad ainult jaotamised tüüpi $4 + 1 + 1 + 1$, $3 + 2 + 1 + 1$ või $2 + 2 + 2 + 1$.

Edasi leiame sobivate variantide realiseerumise tõenäosuse. Selleks, et kasutada kombinaatorikal põhinevat klassikalise tõenäosuse valemit, peavad kõik võimalikud variandid olema võrdse tõenäosusega. Peame leidma kõik võimalused pakkide jaotuseks nii, et kõik need võimalused oleksid võrdtõenäolised. Arutleme nii: alustuseks valime kõigi pakkide hulgast ühe paki (iga paki valikuks on võrdne tõenäosus), seejärel valime kullerfirma, mis peab selle paki kohale toimetama (iga firma valikuks on võrdne tõenäosus). Seejärel valime järgmise paki ja selle paki kohaletoimetamiseks ühe firma jne. Kui nummerdame pakid vastavalt sellele, mitmendana me nende kohaletoimetamiseks sobiva firma valime, siis saame erinevate võrdtõenäoliste võimalustena vaadelda kõiki selliseid variante, kus numbrid 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 on jaotatud nelja erineva kullerfirma vahel viisil, kus ühele firmale antud pakkide numbrid on kasvavas järjekorras (iga firma korral eraldi).

Kuna esimese paki korral on võimalik valida 4 erineva variandi vahel, teise paki korral on samuti võimalik valida 4 erineva variandi vahel jne ning valikud on teineteisest sõltumatud, siis kokku on erinevaid valikuvariante $4^7 = 16384$.

Eespool nägime, et ülesande tingimustele vastavate soodsate variantidena tuleb nende hulgast vaadelda tuleb ainult jaotamisi tüüpi $4 + 1 + 1 + 1$, $3 + 2 + 1 + 1$ või $2 + 2 + 2 + 1$. Leiame iga tüüpi jaotamise korral erinevate võimaluste arvud, kuidas saab pakke kullerfirmade vahel jaotada.

Jaotuse $4 + 1 + 1 + 1$ korral peab üks firmadest kohale viima 4 pakki (ülejäänud firmad saavad igaüks ühe ülejäänud pakkidest). Neljast pakist koosneva komplekti koostamiseks (pakkide numbrid peavad olema kasvavas järjekorras) on $C_7^4 = 35$ võimalust. Kui neljast pakist koosnev komplekt on koostatud, siis on erinevad võimalused veel vastavalt sellele, milline kullerfirma selle komplekti kohale viib ning kuidas jaotuvad ülejäänud pakid ülejäänud kullerfirmade vahel. Erinevate võimaluste arvu saamiseks tuleb üle lugeda kõik võimalikud firmade ümberjärjestused. Nelja erineva firma ümberjärjestusteks on $4! = 24$ võimalust. Kokku on erinevaid $4 + 1 + 1 + 1$ variante $35 \cdot 24 = 840$.

Jaotuse $3 + 2 + 1 + 1$ korral peab üks firmadest kohale viima 3 pakki, teine 2 pakki (ülejäänud firmad saavad kumbki ühe ülejääva paki). Komplektide $3 + 2$ koostamiseks (pakkide numbrid peavad iga firma korral olema kasvavas järjekorras) on $C_7^3 \cdot C_4^2 = 35 \cdot 6 = 210$ võimalust, iga sellise variandi korral

võivad ka kõik firmad olla suvalisel viisil ümber järjestatud. Nelja erineva firma ümberjärestusteks on $4! = 24$ võimalust. Kokku on erinevaid $3 + 2 + 1 + 1$ variante $210 \cdot 24 = 5040$.

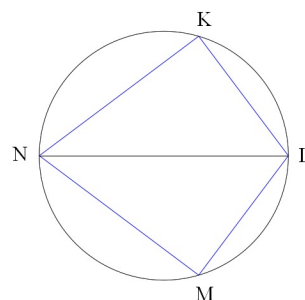
Jaotuse $2 + 2 + 2 + 1$ korral peavad kolm firmat kohale viima 2 pakki (viimane firma saab ülejääva paki). Selliste komplektide koostamiseks (pakkide numbrid peavad iga firma korral olema kasvavas järjekorras) on $C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 = 21 \cdot 10 \cdot 3 = 630$ võimalust. Iga sellise võimaluse korral saame ümberjärjestada ainult ühte pakki kohale viivat firmat (ülejäänud korduvad võimalused oleme juba arvesse võtnud). Seega on ümberjärestusteks on 4 võimalust. Kokku on erinevaid $2 + 2 + 2 + 1$ variante $630 \cdot 4 = 2520$.

Kõiki soodsaid variante on kokku $840 + 5040 + 2520 = 8400$. Otsitav tõenäosus on

$$\frac{8400}{16384} = \frac{525}{1024} \approx 0,5127.$$

Ülesande 6 lahendus (ülesande autor Liivi Kluge).

Uurime nelinurka $KLMN$. Selle nelinurga kõik tipud asuvad välimisel ringjoonel, seetõttu on see ringjoon ühtlasi ümberringjooneks ka kolmnurkadele LMN ja LKN . Nende kolmnurkade üks külg on ühine ning ülejäänud küljed on paarikaupa võrdsete pikkustega, mistõttu on kolmnurgad LMN ja LKN võrdsed. Seetõttu on nelinurk $KLMN$ sümmeetriline diagonaali LN suhtes.



See nelinurk on välimise ringjoone kõõlnelinurgaks. Sümmeetria tõttu peab nelinurga diagonaal LN ühtima ringjoone diagonaaliga (ja läbima ringjoone keskpunkti). Kuna nurgad LKN ja LMN on ringjoone diagonaalile toetuvad piiridenurgad, siis on need nurgad täisnurgad.

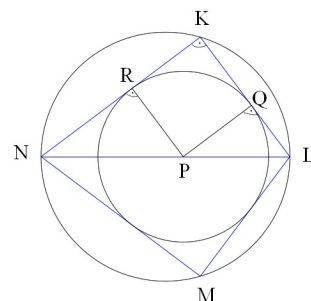
Mõlema täisnurkse kolmnurga pindalaks on $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, kogu nelinurga $KLMN$ pindala on $2 \cdot 6 = 12$.

Täisnurkse kolmnurga LKN kolmanda külje pikkuse saame leida Pythagorase teoreemi põhjal:

$$LN = \sqrt{KL^2 + LM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Järgnevalt leiame nelinurga $KLMN$ sisse joonestatud maksimaalse raadiusega ringjoone. Kuna lõik LN on sümmeetriateljeks, siis peab ka selle sisse joonestatud maksimaalse ringjoone keskpunkt asuma sellel sümmeetriateljel.

Kui nelinurgal $KLMN$ on olemas siseringjoon, siis see on ühtlasi ka maksimaalne ringjoon, mis selle nelinurga sisse mahub. Oletame, et on olemas selline siseringjoon, et nelinurga küljed on selle ringjoone puutujateks. Tähistame sisemise ringjoone keskpunkti tähega P (see peab asuma lõigul LN) ning puutepunktid külgedega NK ja KL vastavalt tähtedega R ja Q . Siis peaksid tekkinud kolmnurgad NRP ja PQL olema sarnased kolmnurgadega NKL (sest igal kolmnurgal on üks täisnurk ning $\angle RNP = \angle KNL$ ja $\angle QLP = \angle KLN$).



Kui tähistame ringjoone raadiuse r -ga siis $RP = PQ = RK = KQ = r$ ning $QL = 3 - r$ ja $NR = 4 - r$. Sarnastest kolmnurkadest NKL ja PQL leiame

$$\frac{4}{3} = \frac{r}{3-r} \Rightarrow 4(3-r) = 3r \Rightarrow 12 - 4r = 3r \Rightarrow r = \frac{12}{7}.$$

Arvutame ka kolmnurga NRP korral:

$$\frac{4-r}{r} = \frac{4-\frac{12}{7}}{\frac{12}{7}} = \frac{28-12}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Seega on tõepoolest kõik kolm kolmnurka sarnased ja nelinurgal $KLMN$ on olemas siseringjoon raadiusega $r = \frac{12}{7}$. Sisemise ringi pindalaks on $\pi\left(\frac{12}{7}\right)^2$. Nelinurga $KLMN$ ja selle sisse joonestatud siseringjoone vahelise viirutatud ala pindala on

$$12 - \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2.$$

Nelinurga $KLMN$ siseringjoone sisse on joonestatud uus (eelmisega sarnane) nelinurk. Uue nelinurga pikema diagonaali pikkuseks on ringjoone diameeter $2 \cdot \frac{12}{7} = \frac{24}{7}$. Nelinurga $KLMN$ diagonaali pikkuseks oli 5, seega on uue nelinurga diagonaal nelinurga $KLMN$ diagonaalist $\frac{24}{7 \cdot 5} = \frac{24}{35}$ korda väiksem. Kuna nelinurgad on sarnased, siis on kõik uue nelinurga küljed nelinurga $KLMN$ külgedest $\frac{24}{35}$ korda lühemad (ning ka järgmise siseringjoone raadius tuleb $\frac{24}{35}$ korda väiksem). Järgmise nelinurga pindalaks $\frac{24}{35} \cdot 4 \cdot \frac{24}{35} \cdot 3 = 12 \cdot \left(\frac{24}{35}\right)^2$, järgmise ringi pindala on $\pi\left(\frac{24}{35} \cdot \frac{12}{7}\right)^2 = \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{24}{35}\right)^2$ ning teise nelinurga ja ringi vahelise viirutatud ala pindalaks on

$$\left(\frac{24}{35}\right)^2 \cdot \left(12 - \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2\right).$$

Jätkates tuleb iga järgmise nelinurga korral viirutatud alade pindala $\left(\frac{24}{35}\right)^2$ korda väiksem. Kõigi viirutatud alade kogupindala saamiseks liidame

$$\begin{aligned} & \left(12 - \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2\right) + \left(\frac{24}{35}\right)^2 \cdot \left(12 - \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2\right) + \left(\frac{24}{35}\right)^2 \cdot \left(\frac{24}{35}\right)^2 \cdot \left(12 - \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2\right) + \dots = \\ & = \left(12 - \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{24}{35}\right)^2 + \left(\left(\frac{24}{35}\right)^2\right)^2 + \left(\left(\frac{24}{35}\right)^2\right)^3 + \dots\right). \end{aligned}$$

Viimastes sulgudes oleva summa väärtus on leitav kui teguriga $\left(\frac{24}{35}\right)^2$ geomeetrilise jada summa

$$1 + \left(\frac{24}{35}\right)^2 + \left(\left(\frac{24}{35}\right)^2\right)^2 + \left(\left(\frac{24}{35}\right)^2\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \left(\frac{24}{35}\right)^2} = \frac{1225}{649}.$$

Kogu viirutatud ala pindala on

$$\left(12 - \pi\left(\frac{12}{7}\right)^2\right) \cdot \frac{1225}{649} = \frac{12(49 - 12\pi)}{49} \cdot \frac{1225}{649} = \frac{12(49 - 12\pi)}{49} \cdot \frac{25 \cdot 49}{649} = \frac{300(49 - 12\pi)}{649}.$$