

IV koolimatemaatika olümpiaad

11. mai 2024, 10.00-15.00

Lahendamisaega on 5 tundi. Ülesande maksimaalne võimalik punktiarv on toodud ülesande teksti alguses. Palun kirjuta iga ülesande lahendus eraldi lehele ja märgi iga lehe ülemisse serva sulle antud kood ja ülesande number!

1. (10 punkti) Olgu $f(x) = 12 - \log_{\frac{1}{3}} x$ ja $g(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$. Leidke kõik parameetri a väärtused, mille korral võrrandil $[f(x) - a]^2 + [g(x) - a]^2 = 0$ ei ole lahendeid.

2. (15 punkti) Esimeses karbis oli m valget ja n musta kuuli ($m, n > 0$), teises karbis oli 5 valget ja 3 musta kuuli. Esimesest karbist võeti huupi kuul ja pandi teise karpi. Seejärel teises karbis olevad kuulid segati ja siis võeti teisest karbist huupi üks kuul. Osutus, et viimasena võetud kuul on valge. Nüüd on esimesest karbist võetud erinevat värvi kuulide tinglikud tõenäosused võrdsed. Määrake esimeses karbis algul olnud valgete ja mustade kuulide arvud m ja n selliselt, et

- a) $m + n$ oleks vähim b) $m + n = 2024$.

3. (15 punkti) Kiirtee äärde rajatakse mürakaitsevall koos külgneva sademete äravoolukraaviga. Rajatava mürakaitsevalli profiili kirjeldab funktsioon $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - 1\frac{1}{12}x^2 + 3,5x$ lõigus $[0; 7]$, kus muutuja x on antud meetrites ning x -telg on kiirtee tasapind.

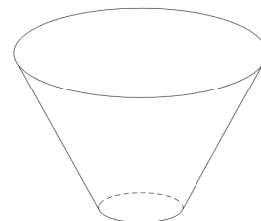
- a) Milline on selle mürakaitsevalli nõlva suurim kallak (külpinna kaldenurk kiirtee tasapinna suhtes)?
b) Arvutage mürakaitsevalli rajamiseks vajamineva maapinna kogus (m^3), kui vall rajatakse pikkusega 120 m ja äravoolukraavi rajamisel teisaldatav pinnas kasutatakse vallis ning enne valli rajamist on maapind kiirtee tasapinnas.

4. (20 punkti) Tarbija on nõus hinnaga p_D ostma teatavat kaupa koguses Q_D , kusjuures $Q_D = 2,5 - 0,25p_D$. Müüja pakub seda kaupa hinnaga p_S koguses Q_S , kus $Q_S = 0,2p_S - 1,2$. Riigi poolt kehtestatakse läbimüüdud toodangule käibemaksumäär k ($0 \leq k < 1$), st kui müüja saab kauba müügist tulu R , siis peab ta sellest riigile maksma käibemaksu suuruses kR . Tegelikult müüdud kaubakogus q rahuldab tingimust $Q_D = Q_S = q$, kusjuures see kogus q müüakse läbi hinnaga p_D , mis rahuldab tasakaalutingimust: $p_D = (1 + k)p_S$.

- a) Avaldada tasakaalutingimust rahuldavad q , p_D , p_S , R ja riigile laekunud käibemaks käibemaksumäära k kaudu.
b) Kuidas muutuvad tasakaalutingimusele vastav kaubakogus, nõudlushind p_D ning laekuva käibemaksu kogusuurus, kui käibemaksumäära k suurendada?
c) Millise käibemaksumäära korral on riigile laekuv käibemaksutulu suurim?

5. (20 punkti) Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus on vektor $\overrightarrow{AH} = (4; -10)$ ja tipust B tõmmatud nurgapoolitaja asub sirgel $9x - 8y - 44 = 0$. Arvuta kolmnurga tippude A ja B koordinaadid, kui kolmas tipp on $C(6; -6)$.

6. (20 punkti) Tüvikoonusekujulise klaasi ülemine serv on ringjoone kujuline. Selle ringjoone raadius on $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ cm. Klaasi põhjaks on ring raadiusega $\sqrt{6}$ cm. Klaasi külge mööda mõõdetud kaugus kahe ringjoone vahel on $\frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm. Sellesse klaasi valatakse täpselt 51π cm³ vett ja lisatakse 5 ideaalselt kerakujulist jääpalli, mille diameeter on 2 cm. Kõik jääpallid ujuvad pinnal nii, et 10 protsenti jääpallist on veepinnast kõrgemal. Leida klaasi põhja ja veetaseme vaheline täpne kaugus.



1. (Ülesande autor Andres Talts). Olgu $f(x) = 12 - \log_{\frac{1}{3}} x$ ja $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}^2 x$. Leidke kõik parameetri a väärtused, mille korral võrrandil $[f(x) - a]^2 + [g(x) - a]^2 = 0$ ei ole lahendeid.

Lahendus. Kahe arvu ruutude summa võrdub nulliga ainult siis, kui mõlemad arvud võrduvad nulliga, st võrrandil $[f(x) - a]^2 + [g(x) - a]^2 = 0$ on lahendid parajasti siis, kui

$$\begin{cases} f(x) - a = 0 \\ g(x) - a = 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} 12 - \log_{\frac{1}{3}} x = a \\ \log_{\frac{1}{3}}^2 x = a \end{cases} \quad \text{Kui tähistame } \log_{\frac{1}{3}} x = y, \text{ siis saame } \begin{cases} 12 - y = a \\ y^2 = a \end{cases}$$

Kui võrdsustada a väärtused, siis saame y jaoks võrrandi $y^2 + y - 12 = 0$. Võrrandi $y^2 + y - 12 = 0$ lahenditeks on $y = 3$ või $y = -4$, mis annavad parameetri a väärtuseks vastavalt $a = 9$ või $a = 16$.

Kui avaldada esimesest võrrandist $y = 12 - a$ ja asendada saadud y avaldis teise võrrandisse, siis saame a määramiseks võrrandi $(12 - a)^2 = a$ ehk $a^2 - 25a + 144 = 0$, millest $a = 16$ või $a = 9$.

Nende a väärtuste korral on esialgsel võrrandil lahendid olemas. Ülejäänud parameetri a väärtuste korral lahendeid ei ole. Seega sobivad kõik a väärtused, mis ei ole 9 või 16.

2. (Ülesande autor Alar Leibak) Esimeses karbis oli m valget ja n musta kuuli ($m, n > 0$), teises karbis oli 5 valget ja 3 musta kuuli. Esimesest karbist võeti huupi kuul ja pandi teise karpi. Seejärel teises karbis olevad kuulid segati ja siis võeti teisest karbist huupi üks kuul. Osutus, et viimasena võetud kuul on valge. Nüüd on esimesest karbist võetud erinevat värvi kuulide tinglikud tõenäosused võrdsed. Määrake esimeses karbis algul olnud valgete ja mustade kuulide arvud m ja n selliselt, et
a) $m + n$ oleks vähim b) $m + n = 2024$.

Lahendus. Algul oli esimeses karbis $m + n$ kuuli, neist m valget ja n musta. Moodustame hüpoteeside süsteemi. H_1 : esimesest karbist teise tõstetakse must kuul. H_2 : esimesest karbist teise tõstetakse valge kuul. Nende hüpoteeside realiseerumise tõenäosused on vastavalt

$$P(H_1) = \frac{n}{n+m} \quad \text{ja} \quad P(H_2) = \frac{m}{n+m}$$

Kui realiseerus hüpotees H_1 , siis oli peale ringitõstmist teises karbis 5 valget ja 4 musta kuuli. Kui realiseerus hüpotees H_2 , siis oli peale ringitõstmist teises karbis 6 valget ja 3 musta kuuli. Tinglikud tõenäosused, et selle hüpoteesi realiseerumise korral saadi teisest karbist valge kuul, on vastavalt

$$P(\text{valge}|H_1) = \frac{5}{9} \quad \text{ja} \quad P(\text{valge}|H_2) = \frac{6}{9}$$

Tinglik tõenäosus, et realiseerus üks (või teine) hüpotees, tingimusel, et teisest karbist saadi valge kuul, avaldub:

$$P(H_1|\text{valge}) = \frac{P(H_1)P(\text{valge}|H_1)}{P(\text{valge})}, \quad P(H_2|\text{valge}) = \frac{P(H_2)P(\text{valge}|H_2)}{P(\text{valge})},$$

kus nimetajas on teisest karbist valge kuuli saamise tõenäosus kokku. Ülesande tingimuse tõttu peab $P(H_1|\text{valge}) = P(H_2|\text{valge})$. Kuna mõlema avaldise nimetajad on ühesugused, siis peavad võrduma nende avaldiste lugejad, st

$$P(H_1)P(\text{valge}|H_1) = P(H_2)P(\text{valge}|H_2) \quad \text{ehk} \quad \frac{n}{n+m} \cdot \frac{5}{9} = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{6}{9},$$

millest $5n = 6m$. Vähimad võimalikud täisarvud saame $m = 5$ ja $n = 6$ korral.

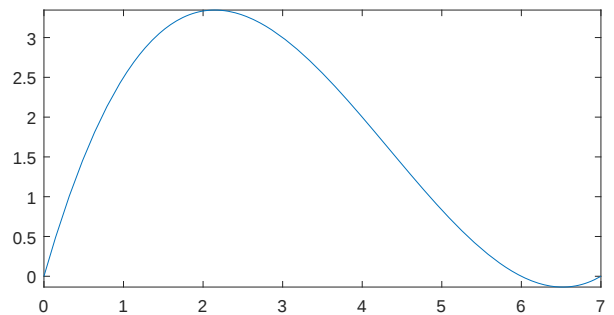
Kui nõuame lisaks, et $n + m = 2024$, siis asendades $n = \frac{6}{5}m$, saame $\frac{6}{5}m + m = 2024$, millest $m = \frac{2024}{1+\frac{6}{5}} = 920$ ja $n = \frac{6}{5} \cdot 920 = 1104$.

3. (Ülesande autor Andres Talts) Kiirtee äärde rajatakse mürakaitsevall koos külgneva sademete äravoolukraaviga. Rajatava mürakaitsevalli profiili kirjeldab funktsioon $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + 3,5x$ lõigus $[0; 7]$, kus muutuja x on antud meetrites ning x -telg on kiirtee tasapind.

- a) Milline on selle mürakaitsevalli nõlva suurim kallak (külpinna kaldenurk kiirtee tasapinna suhtes)?
 b) Arvutage mürakaitsevalli rajamiseks vajamineva maapinna kogus (m^3), kui vall rajatakse pikkusega 120 m ja äravoolukraavi rajamisel teisaldatav pinnas kasutatakse vallis ning enne valli rajamist on maapind kiirtee tasapinnas.

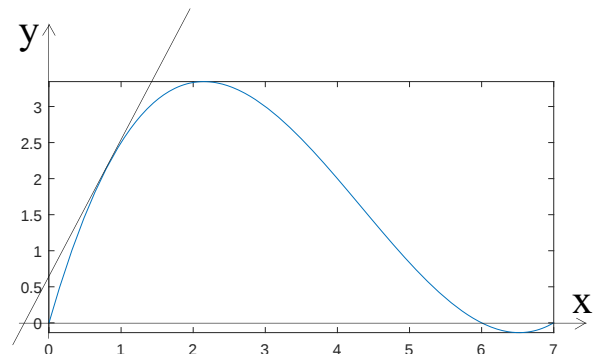
Lahendus. Kuna kõik andmed on meetrites, siis lahenduses me mõõtühikuid ei arvesta. Antud funktsioon on esitatav

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + 3,5x = \\ &= \frac{1}{12}(x^3 - x^2 + 42x) = \\ &= \frac{1}{12}x(x - 6)(x - 7). \end{aligned}$$



Seega on $0 \leq x \leq 6$ korral tegemist mürakaitsevalliga ja $6 \leq x \leq 7$ korral tegemist kraaviga.

- a) Nõlva kallak on nurk funktsiooni graafiku puutuja ja horisontaalse sirge vahel. Selle leidmiseks kasutame funktsiooni tuletise väärtust. Nõlva kallak on suurim punktis, kui funktsiooni tuletisel on (absoluutväärtuse poolest) suurim väärtus. Pideval funktsioonil võib ekstremaalne väärtus olla kas lõigu otspunktis või siis punktis, kus puutujafunktsiooni tuletis ehk $f'(x)$ on null.



Leiame

$$f'(x) = \frac{1}{12}(3 \cdot x^2 - 13 \cdot 2x + 42) = \frac{1}{12}(3x^2 - 26x + 42)$$

ja

$$f''(x) = \frac{1}{12}(3 \cdot 2x - 26) = \frac{1}{12}(6x - 26) = \frac{1}{6}(3x - 13)$$

$f''(x) = 0$, kui $x = \frac{13}{3}$. Leiame funktsiooni tuletise väärtused selles punktis ja lõigu otspunktides.

Lahendusvariant 1. Kui mürakaitsevalli osaks lugeda ka kraav, siis on vaatleme lõiku $0 \leq x \leq 7$ ja leiame:

$$f'\left(\frac{13}{3}\right) = \frac{1}{12}\left(3 \cdot \left(\frac{13}{3}\right)^2 - 26 \cdot \frac{13}{3} + 42\right) = -\frac{43}{36} \approx -1,19,$$

$$f'(0) = \frac{42}{12} = 3,5, \quad f'(7) = \frac{1}{12}(3 \cdot 7^2 - 26 \cdot 7 + 42) = \frac{7}{12} \approx 0,58$$

Lahendusvariant 2. Kui kraavi mitte lugeda valli osaks, siis tuleb leida funktsiooni tuletise maksimum lõigul $0 \leq x \leq 6$. Sel juhul tuleb kasutada väärtuseid:

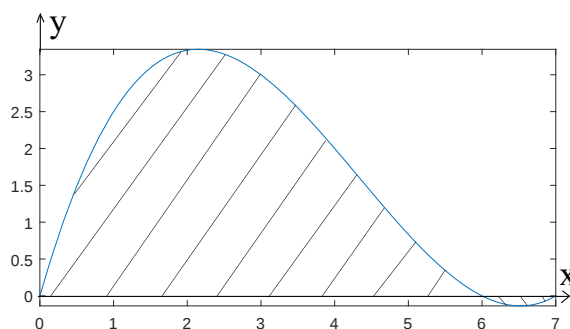
$$f'(\frac{13}{3}) \approx -1,19, \quad f'(0) = \frac{42}{12} = 3,5, \quad f'(6) = \frac{1}{12}(3 \cdot 6^2 - 26 \cdot 6 + 42) = -\frac{6}{12} = -0,5$$

Nendest väärtustest absoluutväärtuse poolest suurim on 3,5, mis saavutatakse $x = 0$ korral. Seega on nõlva suurim kallak punktis, kus $x = 0$. Selles punktis on nurk valli tasapinna ja kiirtee tasapinna vahel $\arctan 3,5 \approx 74^\circ$.

b) Kuna enne tööde algust oli maapind kiirtee tasapinnas ja kraavist väljakaevatud pinnas kasutatakse vallis, siis on vaja leida mürakaitsevali ruumala (arvestades rajatava kraavi ruumala miinusemärgiga).

Kuna kogu pikkuse ulatuses on mürakaitsevall sama profiiliga, siis ruumala leidmiseks leiame ristlõike pindala ja korrutame selle rajatava mürakaitsevali pikkusega. Ristlõike pindala leidmiseks kasutame määratud integraali.

Mürakaitsevali rajamiseks vajamineva maapinna koguse leidmiseks integreerime ristlõike funktsiooni lõigul $[0; 7]$ ja korrutame saadud tulemuse mürakaitsevali pikkusega (120 m).



$$\begin{aligned} 120 \int_0^7 \frac{1}{12}(x^3 - 13x^2 + 42x)dx &= \frac{120}{12} \left(\frac{x^4}{4} - 13\frac{x^3}{3} + 42\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^7 = \\ &= 10 \left(\frac{7^4}{4} - 13\frac{7^3}{3} + 42\frac{7^2}{2} \right) = \frac{8575}{6} \approx 1429,17 \quad (m^3) \end{aligned}$$

4. (*Ülesande autor Ants Aasma*) Tarbija on nõus hinnaga p_D ostma teatavat kaupa koguses Q_D , kusjuures $Q_D = 2,5 - 0,25p_D$. Müüja pakub seda kaupa hinnaga p_S koguses Q_S , kus $Q_S = 0,2p_S - 1,2$. Riigi poolt kehtestatakse läbimüüdud toodangule käibemaksumäär k ($0 \leq k < 1$), st kui müüja saab kauba müügist tulu R , siis peab ta sellest riigile maksma käibemaksu suuruses kR . Tegelikult müüdud kaubakogus q rahuldab tingimust $Q_D = Q_S = q$, kusjuures see kogus q müüakse läbi hinnaga p_D , mis rahuldab tasakaalutingimust: $p_D = (1+k)p_S$.

a) Avaldada tasakaalutingimust rahuldavad q , p_D , p_S , R ja riigile laekunud käibemaks käibemaksumäära k kaudu.

b) Kuidas muutuvad tasakaalutingimusele vastav kaubakogus, nõudlushind p_D ning laekuva käibemaksu kogusuurus, kui käibemaksumäära k suurendada?

c) Millise käibemaksumäära korral on riigile laekuv käibemaksutulu suurim?

Lahendus (Ants Aasma). a) Avaldame antud seostest $Q_D = 2,5 - 0,25p_D \Rightarrow p_D = 10 - 4Q_D$ ja $Q_S = 0,2p_S - 1,2 \Rightarrow p_S = 6 + 5Q_S$. Tasakaalutingimuste $Q_D = Q_S = q$ ja $p_D = (1+k)p_S$ tõttu võime kirjutada

$$10 - 4q = (1+k) \cdot (6 + 5q) \Rightarrow (9 + 5k) \cdot q = 4 - 6k \Rightarrow q = \frac{4 - 6k}{9 + 5k}$$

Tagasiasendusega saame

$$p_S = 6 + 5q = 6 + 5 \cdot \frac{4 - 6k}{9 + 5k} = \frac{74}{9 + 5k}$$

$$p_D = (1+k) \cdot \frac{74}{9 + 5k} = \frac{74(1+k)}{9 + 5k}$$

Kaubakoguse q müügist laekub müüjale tulu

$$R = q \cdot p_S = \frac{4 - 6k}{9 + 5k} \cdot \frac{74}{9 + 5k} = 148 \frac{(2 - 3k)}{(9 + 5k)^2}$$

Järelikult riigile laekuv käibemaks avaldub kujul

$$K = kR = 148 \frac{(2 - 3k) \cdot k}{(9 + 5k)^2}$$

b) Leiame q , p_D ja K tuletised k järgi

$$q' = -\frac{74}{(9 + 5k)^2}, \quad p'_D = \frac{296}{(9 + 5k)^2}, \quad K' = 296 \cdot \frac{9 - 32k}{(9 + 5k)^3}$$

Kuna iga k väärtuse korral $q' < 0$ ja $p'_D > 0$, siis k suurenemine toob endaga kaasa tasakaalutingimusele vastava müüdava kauba koguse kahanemise ja hinna suurenemise. Edasi paneme tähele, et

$$K' > 0, \quad \text{kui} \quad 9 - 32k > 0 \quad \text{ehk} \quad 0 \leq k < \frac{9}{32} = 0,28125 \quad \text{ning} \quad K' > 0, \quad \text{kui} \quad \frac{9}{32} < k < 1.$$

Seega suurendades käibemaksu kuni 28,125 protsendini, laekuv käibemaksusumma suureneb. Kuid edasine käibemaksu suurendamine põhjustab käibemaksu laekumise kahanemise.

c) Eelmises punktis toodud arutluse põhjal on selge, et riigile laekuv käibemaks on maksimaalne, kui käibemaksumäär on 28,125 protsenti. Sel juhul laekub riigile

$$K = 148 \frac{(2 - 3 \cdot \frac{9}{32}) \cdot \frac{9}{32}}{(9 + 5 \cdot \frac{9}{32})^2} = \frac{4}{9}.$$

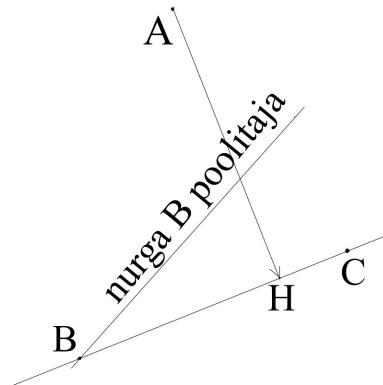
5. (Ülesande autor Pilve Uussaar) Kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kõrgus on vektor $\overrightarrow{AH} = (4; -10)$ ja tipust B tõmmatud nurgapoolitaja asub sirgel $9x - 8y - 44 = 0$. Arvuta kolmnurga tippude A ja B koordinaadid, kui kolmas tipp on $C(6; -6)$.

Lahendus. Esmalt leiame külje BC , selle abil saame punkti B leitud külje ja nurgapoolitaja lõikepunktina. Seejärel leiame sirge, millel asub külge AB . Lõpuks nihutame külge BC antud kõrgusvektori võrra ja leiame punkti A kahe sirge lõikepunktina.

Esmalt leiame sirge, millel asub kolmnurga külge BC . Kolmnurga kõrgus $\overrightarrow{AH} = (4; -10)$ peab olema risti kolmnurga tippe B ja C läbiva küljega. Seega külge BC peab asuma sirgel, mis on risti vektoriga $\overrightarrow{AH}$ ja läbima punkti C .

Sihivektoriks sobib vektor, mis on risti $\overrightarrow{AH}$ -ga, näiteks $\vec{s} = (10; 4)$, st külge BC asub sirgel

$$\frac{x-6}{10} = \frac{y+6}{4} \quad \text{ehk} \quad y = 0,4x - 8,4$$



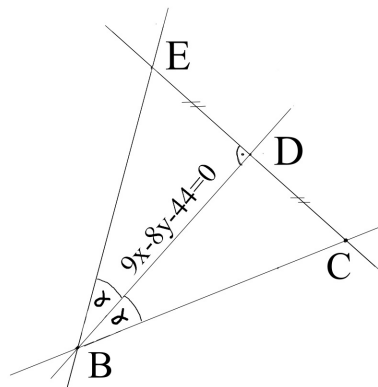
Punkti B leidmine. Punkt B peab asuma nii sellel sirgel kui ka antud nurgapoolitajal. Leiame kahe sirge lõikepunkti:

$$\begin{cases} 9x - 8y - 44 = 0 \\ y = 0,4x - 8,4 \end{cases} \Rightarrow 9x - 8(0,4x - 8,4) = 44 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -10 \end{cases}$$

Seega on kolmnurga tipp $B(-4; -10)$.

Järgnevalt leiame sirge, millel asub kolmnurga külge AB . Selleks peegeldame punkti C nurgapoolitaja suhtes (leiame punkti E). Punkt A asub sirgel, mis läbib punkte E ja B . Punkti E leidmiseks konstrueerime nurgapoolitajale ristsirge läbi punkti C . Selle sirge sihivectoriks sobib iga nurgapoolitajaga $9x - 8y - 44 = 0$ risti olev vektor, näiteks $\vec{n} = (9; -8)$. Saame ristsirgeks

$$\frac{x-6}{9} = \frac{y+6}{-8} \quad \text{ehk} \quad y = -\frac{6}{9} - \frac{8}{9}x$$



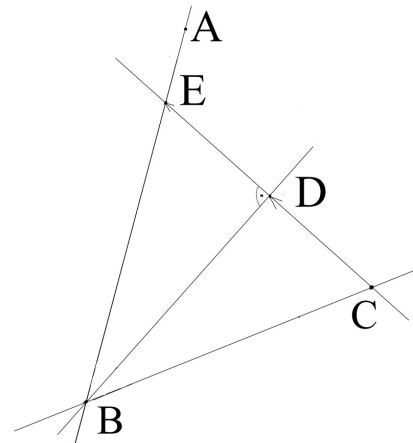
Selle sirge lõikepunkt nurgapoolitajaga olgu D , mille koordinaadid leiame võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} 9x - 8y - 44 = 0 \\ y = -\frac{6}{9} - \frac{8}{9}x \end{cases} \Rightarrow 9x - 8\left(-\frac{6}{9} - \frac{8}{9}x\right) = 44 \Rightarrow \left(9 + \frac{64}{9}\right)x = 44 - \frac{48}{9}$$

$$x = \frac{44 \cdot 9 - 48}{9 \cdot 9 + 64} = \frac{348}{145} = \frac{12}{5} = 2,4 \Rightarrow y = -\frac{6}{9} - \frac{8}{9} \cdot 2,4 = -\frac{14}{5} = -2,8$$

Vektori $\overrightarrow{CD}$ koordinaatideks on

Tahame leida sellist punkti E , et $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$. Kui rakendada vektor $\overrightarrow{CD}$ punkti D , siis jõuame punktini E , mis ongi otsitavaks punkti C peegelduseks. Leiame punkti E koordinaadid: $x = -3, 6 + 2, 4 = -1, 2$ ja $y = 3, 2 + (-2, 8) = 0, 4$, st $E(-1, 2; 0, 4)$.


$$\frac{x - (-4)}{-1, 2 - (-4)} = \frac{y - (-10)}{0, 4 - (-10)} \quad \text{ehk} \quad 10, 4(x + 4) = 2, 8(y + 10) \quad \text{ehk} \quad 26x - 7y + 34 = 0$$

Konstrueerime küljega BC paralleelse sirge läbi saadud punkti (küljega BC paralleelne vektor on $\vec{s} = (10; 4)$):

$$\frac{x+8}{10} = \frac{y}{4} \quad \text{ehk} \quad y = 0, 4x + 3, 2$$

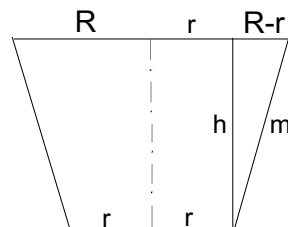
$$\begin{cases} 26x - 7y + 34 = 0 \\ y = 0, 4x + 3, 2 \end{cases}$$

$$26x - 7(0, 4x + 3, 2) + 34 = 0$$
$$x = -0,5 \Rightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ y = 3 \end{cases}$$

6. (*Ülesande autor Jaan Kalda*) Tüvikoonusekujulise klaasi ülemine serv on ringjoone kujuline. Selle ringjoone raadius on $\frac{5}{3}\sqrt{6}$ cm. Klaasi põhjaks on ring raadiusega $\sqrt{6}$ cm. Klaasi külge mööda mõõdetud kaugus kahe ringjoone vahel on $\frac{10}{3}\sqrt{6}$ cm. Sellesse klaasi valatakse täpselt 51π cm³ vett ja lisatakse 5 ideaalselt kerakujulist jääpalli, mille diameeter on 2 cm. Kõik jääpallid ujuvad pinnal nii, et 10 protsenti jääpallist on veepinnast kõrgemal. Leida klaasi põhja ja veetaseme vaheline täpne kaugus.

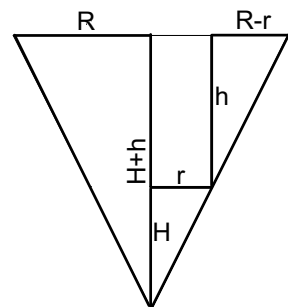
Lahendus. Kuna kõik algandmed on antud sentimeetrites, siis me arvutustes ühikuid ei kasuta.

Tähistame klaasi ülemise serva ringjoone raadiuse R , klaasi põhjale vastava ringi raadiuse r ja klaasi külje pikkuse m -ga. Esmalt arvutame kogu klaasi kõrguse. Selleks vaatleme klaasi lõiget läbi sümmeetriatelje. Kolmnurk, mille külgedeks on klaasi kõrgus h , klaasi külje pikkus m ja $R-r$ on täisnurkne kolmnurk. Pythagorase teoreemi põhjal saame leida



$$h = \sqrt{m^2 - (R - r)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\sqrt{6} - \sqrt{6}\right)^2} = 8$$

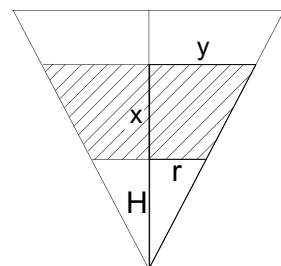
Kui pikendame klaasi külge kuni lõikumiseni klaasi sümmeetriateljega, siis saame kolm sarnast kolmnurka. Sarnastest kolmnurkadest leiame



$$\frac{r}{H} = \frac{R - r}{h} = \frac{R}{h + H} \Rightarrow H = \frac{rh}{R - r} = \frac{\sqrt{6} \cdot 8}{\frac{2}{3}\sqrt{6}} = 12$$

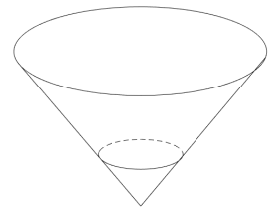
või $H + h = \frac{Rh}{R - r} = 20$.

Kanname samale joonisele ka vedelikutasemele vastava sirglõigu, tähistame otsitava vedelikupinna kauguse klaasi põhjast x -ga ja vedelikupinnale vastava ringi raadiuse y -ga. Saame veel ühe kolmnurga, mis on sarnane eelmistega, st kehtib



$$\frac{y}{x + H} = \frac{r}{H} \Rightarrow y = \frac{r}{H}(x + H) = \frac{\sqrt{6}}{12}(x + 12)$$

Kui klaas on täidetud kuni kõrguseni x , siis klaasis oleva aine ruumala on suurema koonuse ruumala miinus väiksema koonuse ruumala. Suurem koonus on kõrgusega $x + H$ ja (põhja)raadiusega y , väiksem koonus on kõrgusega H ja raadiusega r . Väiksema koonuse ruumalaks on $V_{\text{väiksem koonus}} = \frac{1}{3}\pi r^2 H = 24\pi$, suurema koonuse ruumala avaldub



$$V_{\text{suurem koonus}} = \frac{1}{3}\pi y^2(x+H) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{12}(x+12)\right)^2(x+12) = \frac{\pi}{72}(x+12)^3$$

Klaasi valatud vedeliku pind on kõrgusel, mis vastab vedeliku koguse ja 90 protsendi jääkuulide ruumala summale. Ühe jääkuuli ruumala on $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}$. Viie jääkuuli ruumala on $\frac{20\pi}{3}$. Sellest 90 protsenti on $0,9 \cdot \frac{20\pi}{3} = 6\pi$. Seega veetaseme kõrgus vastab ruumalale $V = 51\pi + 6\pi = 57\pi$.

Otsitava kauguse x määramiseks saame võrrandi $V_{\text{suurem koonus}} - V_{\text{väiksem koonus}} = V$

$$\frac{\pi}{72}(x+12)^3 - 24\pi = 57\pi,$$

millest

$$(x+12)^3 = (57+24) \cdot 72 = 5832 \quad \Rightarrow \quad x+12 = \sqrt[3]{5832} = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \text{ [cm]}$$