

Füüsikavõistlus „Kajakas” — lahendused

6. jaanuar 2026

1. (SUUR TELESKOOP)

Ligikaudne lahendus.

Kõigepealt hindame, mis vahemaa Δz võrra nihkub teleskoobi serv raskusvälja tõttu allapoole. Esimeses lähenduses võrdsustame teleskoobi pinna ruudukujulise plaadiga küljepikkusega R , mida hoitakse ühest servast horisontaalselt nõnda, et teine serv vajub oma raskuse tõttu teatud kõrguse võrra allapoole. Hinnangu saamiseks kasutame skaleerumiseadusi ja dimensioonide analüüsi.

Ilmselt on vertikaalne nihe võrdeline plaadi raskusjõuga Mg ja pöördvõrdeline Youngi mooduliga E . Tõepoolest, mida raskem on plaat, seda rohkem see allapoole vajub, ning mida jäigem see on, seda vähem. Lisaks sõltub Δz plaadi paksusest t ja ruudu läbimõõdust R . Samas, dimensioonide analüüsist on näha, et juhul kui $\Delta z \approx MgR^{\alpha}t^{\beta}/E$, siis $\alpha + \beta = -1$. Tõepoolest, Youngi mooduli ühik on rõhk, st jõud pindalaühiku kohta. Seega Mg/E ühik on pindala.

Edasi hindame, kuidas sõltub Δz paksusest t . Plaadile mõjub raskusvälja poolt jõumoment, mis teda alla surub. Seda tasakaalustavad sisemised pinged, mis tulenevad plaadi kõverdumisest ja diferentsiaalsest kokkusurumisest. Liikudes piki plaadi paksust ülemisest pinnast allapoole, on selge et sisemised pinged kasvavad lineaarselt kaugusega ülemisest pinnast z . Lisaks kasvab sisemiste jõudude jõuõlg võrdeliselt z -ga ning seega integreerides läbi paksuse leiame, et summaarne jõumoment skaleerub kui t^3 . Seega $\beta = -3$ ning $\alpha = 2$. Niisiis,

$$\Delta z \approx \frac{MgR^2}{Et^3} = 0,24 \text{ m.}$$

Kuna teleskoobi pind on parabool valemiga $z = x^2/(4f)$, siis $\Delta z(x = R) \approx R^2\Delta f/(4f^2)$, ehk

$$\Delta f \approx \Delta z \frac{4f^2}{R^2} = 0,34 \text{ m.}$$

Täpne vastus: 0,091 m

2. (KÜLGITUUL)

Ligikaudne lahendus.

Kuna rada on piisavalt pikk (200 m), saame jämedas lähenduses eeldada, et jalgrattur liigub suurema osa ajast maksimaalse võimaliku kiirusega v_0 , kus tema kineetiline energia enam ei kasva. Kuigi see alahindab koguaega (jättes arvestamata stardikiirenduse), annab see kahe olukorra *ajavahe* (Δt) väga täpselt, sest stardifaas on mõlemal juhul sarnane (väiksel kiirusel on õhutakistus tühine) ja erinevus tekib just tippkiiruste erinevusest. Leiame lõppkiirused ja distantse läbimise ajad antud lähenduses mõlema juhtumi jaoks.

a) Ilma tuuleta olukord: võimsus kulub puhtalt õhutakistuse ületamiseks. Ratturi õhutakistus on $F_t = 0,45A\rho v^2 = kv^2$, kus $k = 0,234 \text{ kg/m}$ ning võimsus on seega $P = F_tv_0 = kv_0^3$, millest

$$v_0 = \sqrt[3]{\frac{P}{k}} \approx 12,880 \text{ m/s.}$$

Raja läbimiseks kuluv aeg on seega

$$t_0 = \frac{L}{v_0} \approx 15,528 \text{ s.}$$

b) Külgtuulega olukord: külgtuul kiirusega u tekitab liikumissuunas lisatakistuse. Takistusjõud on suurusega $k(v^2 + u^2)$ ning suunatud piki ratturi ja tuule suhtelist kiirusvektorit. Kui $v \gg u$, siis liikumissuunaga paralleelne takistusjõu komponent on

$$F_x = k(v^2 + u^2) \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \approx kv^2 + \frac{1}{2}ku^2.$$

Võimsuse bilanss $P = F_x v$ annab

$$P \approx kv^3 + \frac{1}{2}ku^2v \approx kv^3 + \frac{1}{2}ku^2v_0.$$

Kuna parema poole teine liige kujutab endast väikest parandliiget, võisime seal teha lähenduse $v \approx v_0$.

Seega, $v = \sqrt[3]{\frac{P}{k} - \frac{1}{2}u^2v_0} \approx 12,828 \text{ m/s}$, $t = L/v \approx 15,591 \text{ s}$ ning $t - t_0 \approx 0,063 \text{ s}$.

Täpne vastus: 0,051 s

3. (KIIKUMINE)

Ligikaudne lahendus.

Kiigele hoo andmine raskuskeskme liigutamise teel on nähtus nimega parameetriline resonants. Laps teeb tööd, muutes süsteemi pikkust: ta tõstab oma raskuskeset (tõmbab end kätega üles või tõuseb püsti), kui varda pinget on suur, ja langetab seda, kui pinget on väike.

Lihtsaim viis mehhanismi mõistmiseks on eeldada, et laps muudab kiige pikkust järsult ("kandiline" pumpamine). Vaatleme ühte poolperioodi:

- **Alumine asend:** Laps tõuseb püsti (lühendab kiike suurusega $\Delta x = 2a$), kui kiirus on maksimaalne. Varda pinget on siin suurim: $T_{\max} \approx mg + 2E/L$. Laps teeb süsteemi energia suurendamiseks tööd $W_{\text{sisse}} \approx T_{\max} \cdot \Delta x$.
- **Ülemine asend:** Laps kükitab (pikendab kiike), kui kiirus on null. Pinget on siin väikseim: $T_{\min} \approx mg - E/L$. Süsteem teeb lapsega tööd (energia väheneb): $W_{\text{välja}} \approx T_{\min} \cdot \Delta x$.

Netotöö ühe poolperioodi jooksul on $\Delta E \approx (T_{\max} - T_{\min})\Delta x \approx \frac{3E}{L}(2a) = 6\frac{a}{L}E$. Tähistame energia suhtelise kasvu ühe sammu (poolperioodi) jooksul $\delta = 6a/L$.

Aja t jooksul läbib kiik N poolperioodi. Energia kasvab sammhaaval, mis paljude sammude korral läheneb eksponentsiaalsele funktsioonile:

$$E(t) = E_0 (1 + \delta)^N \approx E_0 e^{N\delta}$$

Amplituud on võrdeline energia ruutjuurega, $A(t) \propto \sqrt{E(t)}$, seega:

$$A(t) \approx A_0 \sqrt{e^{N\delta}} = A_0 e^{N\frac{\delta}{2}}$$

Asendame poolperioodide arvu $N = \frac{t}{T/2} = \frac{t\omega}{\pi}$ ja $\delta = \frac{6a}{L}$:

$$A(t) = A_0 \exp\left(\frac{t\omega}{\pi} \cdot \frac{3a}{L}\right) = A_0 \exp\left(\frac{3a\omega}{\pi L}t\right)$$

Otsime aega t , millal $A(t) = 2A_0$:

$$e^{\frac{3a\omega}{\pi L}t} = 2 \implies \frac{3a\omega}{\pi L}t = \ln 2,$$

millest

$$t = \frac{\pi \ln 2}{3} \frac{L}{a} \sqrt{\frac{L}{g}} \approx 31 \text{ s}.$$

Täpne lahendus.

Ülaltoodud mudel eeldas hüppelist liikumist. Sujuva, sinusoidaalse liikumise korral on energiaülekanne vähem efektiivne täpselt teguri $\pi/4$ võrra, seega täpne vastus

$$t = \frac{4 \ln 2}{3} \frac{L}{a} \sqrt{\frac{L}{g}} \approx 38,9 \text{ s}$$

4. (SAUNALAVALT VETTE)

Ligikaudne lahendus.

Aja τ jooksul levib jääse vee jahtumine teatud karaktersele sügavusele δx . Selle kihi erisoojus on $\rho A \delta x c$ ning seega kadunud soojushulk on $Q \approx \rho A \delta x c \Delta T$, kus $\Delta T = T_1 - T_0$. Samas peab kihist eraldunud soojushulk läbima keha kes vahemaa δx aja τ jooksul. Soojusvoog on ligikaudu $k A \Delta T / \Delta t$ ning seega

$$Q \approx \frac{k A \Delta T \tau}{\delta x} \approx \rho A \delta x c \Delta T.$$

Niisiis, maha jahtunud kihi paksus on ligikaudu

$$\delta x = \sqrt{\frac{k \tau}{\rho c}} = 0,87 \text{ mm}$$

ja seega kaotatud soojushulk on

$$Q \approx \rho A \delta x c \Delta T = 124 \text{ kJ}.$$

Dimensioonide analüüs.

Eeldame, et otsitav soojushulk Q sõltub ülesandes antud muutujatest astmeseaduste kaudu:

$$Q \approx A^\alpha \cdot \Delta T^\beta \cdot \tau^\gamma \cdot k^\delta \cdot \rho^\epsilon \cdot c^\zeta.$$

Avaldame kõikide suuruste ühikud SI põhiühikutes (kg, m, s, K):

- $[Q] = \text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$
- $[A] = \text{m}^2$
- $[\Delta T] = \text{K}$
- $[\tau] = \text{s}$
- $[k] = \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^3 / \text{K}$
- $[\rho] = \text{kg} / \text{m}^3$
- $[c] = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Asendame need esialgsesse võrrandisse:

$$\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = (\text{m}^2)^\alpha (\text{K})^\beta (\text{s})^\gamma (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1})^\delta (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})^\epsilon (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1})^\zeta.$$

Koostame võrrandisüsteemi iga ühiku astendajate jaoks:

$$\begin{aligned} \text{kg} : 1 &= \delta + \epsilon \\ \text{m} : 2 &= 2\alpha + \delta - 3\epsilon + 2\zeta \\ \text{s} : -2 &= \gamma - 3\delta - 2\zeta \\ \text{K} : 0 &= \beta - \delta - \zeta \end{aligned}$$

Meil on 4 võrrandit ja 6 tundmatut. Olukorra füüsikast teame, et soojushulk on võrdeline pindalaga ($\alpha = 1$) ja temperatuuride vahega ($\beta = 1$). Sellega muutub süsteem lahendatavaks ja leiame, et $\delta = \epsilon = \gamma = \zeta = 1/2$. Niisiis,

$$Q \sim A\Delta T\sqrt{k\rho c\tau} = 124 \text{ kJ}.$$

Täpne vastus: 280 kJ

5. (LASERIKIIR VIHMAS)

Ligikaudne lahendus.

Kujutame ette silindrilist piirkonda (“vorstikest”) ühe valguskiire ümber, mille raadius on r (piisa raadius), pikkus on L ja ruumala $V = \pi r^2 L$. Valguskiir blokeeritakse siis, kui selles ruumalas asub **vähemalt ühe** vihmapiisa keskpunkt. Hinnangus nõuame, et “vorstikeses” on **keskmiselt** ühe vihmapiisa kese, st ($N_k = Vn = \pi r^2 L = 1$), kus n on piiskade arvtihedus (st nende arv ruumalaühiku kohta).

Seome kontsentratsiooni n sademete intensiivsusega I . Aja t jooksul langeb pinnale S vihmakogus ISt , mis on võrdne õhusambas ($h = vt$) olevate piiskade ruumalaga:

$$ISt = (nSvt) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \implies n = \frac{3I}{4v\pi r^3}.$$

Asendame selle “vorstikeses” olevate piiskade arvu avaldisse:

$$N_k = \left(\frac{3I}{4v\pi r^3} \right) \pi r^2 x = \frac{3Ix}{4vr}.$$

Nõudest $N_k \approx 1$ saame hinnangu kiire pikkuse jaoks:

$$L \approx \frac{4vr}{3I} \approx 336 \text{ m}.$$

Täpne lahendus.

Ülesandes küsiti vahemaad, kus võimsus väheneb 10 korda, seega peab teatud kiire antud kaugusele jõudmise tõenäosus olema $p = 0,1$. Jagades ruumala mõtteliselt paljudeks väikesteks osadeks, avaldub läbimineku tõenäosus kujul

$$p = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{N_k}{M} \right)^M = e^{-N_k}.$$

Seades tingimuseks $p = 0.1$ saame, et $e^{-N_k} = 0,1 \implies N_k = \ln 10 \approx 2,30$. Seega on täpne vahemaa $\ln 10$ korda suurem kui meie esialgne hinnang, st 774 m.

6. (RUUDU ELEKTRIVÄLI)

Ligikaudne lahendus.

Vool siseneb ühest nurgast ja väljub teisest. Kuna kontaktid on väikesed ($r \ll a$), siis on kontaktide lähedal väga suur voolutihedus ja järelikult ka väga suur elektriväli. Võime hinnata kontakti läheduses plaadi takistust kauguselt r kuni kauguseni $2r$ kui

$$R_1 \approx \rho \frac{\pi}{2} \frac{r}{t\pi 3r/4} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{t},$$

kus $\pi 3r/4$ tähistab selle “takisti” keskmist “laiust”, st keskele tõmmatud kaare pikkust. Täpselt samasuguse takistuse annab vahemik kauguselt $2r$ kuni $4r$ jne; lõppkokkuvõttes peame korrutama tulemuse selliste “takistite” arvuga $\log_2(a/r)$; et meil on kaks kontakti, siis tuleb korrutada ka teguriga 2, st

$$R \approx \frac{4\rho}{3t} \log_2(a/r).$$

Kuna takistite jadaühenduses jagunevad pinged võrdeliselt takistustega, siis “istub” põhiosa pingest kontaktide lähedal, kusjuures ruudu keskosa kujutab ligikaudu vaid ühte takistit takistusega R_1 . Seega saame hinnata ruudu vastasservale jäävat pinget kui $U_1 \approx U \frac{1}{2 \log_2(a/r)}$ ning elektrivälja kui

$$E \approx U_1/a \approx \frac{U}{a \log_2(a/r)} \approx 0,018 \text{ V/m}.$$

Täpse vastuse saab leida Fourier' rea abil, $E = 0,0159 \text{ V/m}$.