VI koolimatemaatika olümpiaad

9. mail 2026 kell 10.00-15.00

Lahendamiseks on aega on 5 tundi.
Ülesande lahendamise eest saadav maksimaalne võimalik punktiarv on toodud ülesande teksti alguses.
Maksimumpunktide saamiseks peab iga ülesande lahenduskäik olema ammendavalt põhjendatud.
Palun kirjuta iga ülesande lahendus eraldi lehele ja märgi iga lehe ülemisse serva sulle antud kood ja ülesande number!

1. (*10 punkti*) Leidke nelinurga $ABCD$ kõik nurgad ja arvutage külje BC pikkus, kui on teada, et tipu A juures on täisnurk ja tipu D juures 150-kraadine nurk. Veel on teada, et $AD = AB = DC = 1$.

2. (*14 punkti*) 21 teadlast kirjutasid uurimisprojekti käigus kokku 2026 eksperimendipäeviku sissekannet, kusjuures iga teadlane kirjutas erineva arvu sissekandeid. Tõestage, et alati leidub 10 teadlast, kes kirjutasid kokku vähemalt 1025 sissekannet.

3. (*18 punkti*) Parabool ja selle teljega ristuv sirge piiravad tasandilise kujundi, parabooli segmendi. Segmendi saab paigutada võrdhaarsesse kolmnurka, mille haarad on parabooli puutujad segmendi nurkades ja alus on segmendi alus. Kui suure osa moodustab segmendi pindala selle kolmnurga pindalast?

4. (*18 punkti*) Spordiklubi soovib valmistada võimalikult väikese kõrgusega silindrikujulise hoiukarbi, mille saaks pealt kaanega sulgeda ja kuhu pannakse neli ühesugust treeningpalli. Pallid on kerakujulised ja iga palli raadius on r. On teada, et silindri raadius on $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}r$. Avaldage silindri vähim kõrgus palli raadiuse r-i kaudu.

5. (*20 punkti*) Kiire vooluga jões on vee voolamise kiirus $9\frac{km}{h}$, jõe laius on 240 meetrit. Mehel on vaja koos paadiga jõuda risti üle jõe asuvasse punkti. Jõe mõlemal kaldal on paks mets, piki kallast saab paati transportida kiirusega $200\frac{m}{h}$. Mees suudab aerutada kiirusega $8\frac{km}{h}$. Leidke minimaalne aeg, mis kulub mehel soovitud sihtpunkti jõudmiseks? Millises suunas peab ta aerutama?

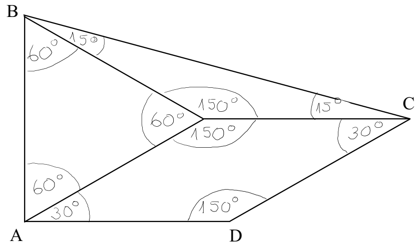
6. (*20 punkti*) Leidke kõik sellised parameetri a väärtused, mille korral funktsiooni

$$y = \frac{\sin x + a}{\cos 2x - 2}$$

muutumispiirkond sisaldab arvu 2.

Lahendused

Ülesande 1 lahendus (Evald Übi).



Küljed AD ja DC on võrdse pikkusega. Täiendame joonist punktiga E nii, et moodustuv nelinurk $ADCE$ oleks romb. Kuna rombi vastasnurgad on võrdsed, siis $\angle AEC = \angle ADC = 150^0$ ning $\angle ECD = \angle DAE = 180^0 - 150^0 = 30^0$.

Lisaks näeme, et $\angle BAE = \angle BAD - \angle DAE = 90^0 - 30^0 = 60^0$. Kuna lõigud BA ja AE on mõlemad pikkusega 1 ning nendevaheline nurk on 60^0, siis moodustuv kolmnurk ABE on võrdkülgne. Järelikult ka $\angle AEB = \angle ABE = 60^0$. Punkti E juures asuvate nurkade summa peab olema 360^0, seega $\angle BEC = 360^0 - 60^0 - 150^0 = 150^0$. Kuna nii BE kui ka EC on pikkusega 1, siis kolmnurk BEC on võrdhaarne ja alusnurgad $\angle EBC = \angle ECB = (180^0 - 150^0) : 2 = 15^0$. Seega on otsitavad kaks nurka

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 60^0 + 15^0 = 75^0$$

ja

$$\angle BCD = \angle BCE + \angle ECD = 15^0 + 30^0 = 45^0$$

Külje BC pikkuse leidmiseks kasutame koosinusteoreemi kolmnurga BCE jaoks:

$$BC = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 150^o} = \sqrt{2 - 2 \cdot \big(- \frac{\sqrt{3}}{2} \big)} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Ülesande 2 lahendus (Andi Kivinukk).

Kuna igaüks tegi erineva arvu sissekandeid, siis saame need järjestada nii, et

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{21}. \tag{1}$$

Kuna $2026 : 21 \approx 96,5$, siis vaatleme kahte juhtu. Kui $a_{11} \leq 96$, siis peab (kuna igaüks tegi erineva arvu sissekandeid) $a_{10} \leq a_{11} - 1 \leq 95$, $a_9 \leq a_{10} - 1 \leq 94$, $\ldots$, $a_2 \leq 87$, $a_1 \leq 86$. Sel juhul

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} + a_{11} \leq 86 + 87 + \cdots + 95 + 96 = 1001$$

ja kuna kõik kokku tegid 2026 sissekannet, siis

$$a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21} \geq 2026 - 1001 = 1025.$$

Kui aga $a_{11} \geq 97$, siis peab erineva arvu sissekannete korral

$$a_{12} \geq a_{11} + 1 \geq 98, \quad a_{13} \geq a_{12} + 1 \geq 99, \quad \ldots, \quad a_{21} \geq 107$$

Kuid siis

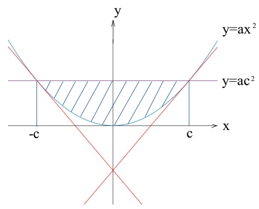
$$a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21} \geq 98 + 99 + 100 + \cdots + 107 = 1025.$$

Seega mõlemal juhul kehtib

$$a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21} \geq 1025.$$

Ülesande 3 lahendus (Andi Kivinukk).

Valime ülesande kirjeldamiseks sobiva koordinaatteljestiku nii, et y-telg ühtiks parabooli sümmeetriateljega ja koordinaatide alguspunkt oleks parabooli haripunktis. Siis on parabooli võimalik esitada võrrandiga $y = ax^2$. Valime telgede suunad nii, et $a > 0$. Parabooli lõigatakse y-teljega ristuva sirgega, mida saab esitada võrrandiga $y = ac^2$ (üldsust kitsendamata võime eeldada, et $c > 0$). Siis on parabooli ja sirge lõikepunktideks punktid



$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = ac^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm c \\ y = ac^2 \end{cases}$$

Tekkiv parabooli segment on pindalaga

$$\int_{-c}^{c} (ac^2 - ax^2)dx = (ac^2 \cdot x - a \cdot \frac{x^3}{3})\Big|_{-c}^{c} = ac^3 - a \cdot \frac{c^3}{3} - (-ac^3 - a \cdot \frac{(-c)^3}{3}) = ac^3(2 - \frac{2}{3}) = \frac{4}{3}ac^3.$$

Kolmnurga haaradeks on parabooli puutujad. Leiame parabooli $y = ax^2$ puutujad punktides, kus $x = \pm c$ ja $y = ac^2$. Funktsiooni $y = ax^2$ tuletiseks on $y' = 2ax$; puutepunktis on tuletise väärtuseks $y'(\pm c) = \pm 2ac$; puutujate võrranditeks on

$$y - ac^2 = \pm 2ac(x - (\pm c))$$

Puutujate lõikepunktiks on

$$\begin{cases} y - ac^2 = 2acx - 2ac^2 \\ y - ac^2 = -2acx - 2ac^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2ac^2 + ac^2 = -ac^2 \end{cases}.$$

Tekkiva võrdhaarse kolmnurga aluse pikkuseks on $2c$ ja kõrguseks on $ac^2 + ac^2 = 2ac^2$. Kolmnurga pindalaks on

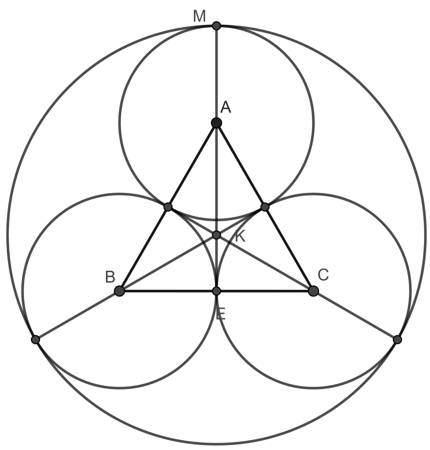
$$\frac{2c \cdot 2ac^2}{2} = 2ac^3.$$

Parabooli segmendi pindala moodustab kolmnurga pindalast

$$\frac{\frac{4}{3}ac^3}{2ac^3} = \frac{2}{3}.$$

Ülesande 4 lahendus (Pilve Uussaar).

Nelja palli saab asetada silindrisse nii, et kolm on põhjal ja neljas nende peal. Vaatame, kas kolm palli mahuvad silindri põhjale. Pallide keskpunktide ühendamisel tekib võrdkülgne kolmnurk ABC, mille küljed on $2r$ ja lõik



$$AK = \frac{2}{3} \cdot AE = \frac{2}{3}\sqrt{(2r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Järelikult silindri raadius peab olema vähemalt

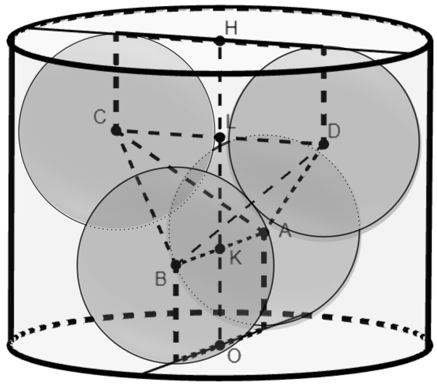
$$MK = MA + AK = r + \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}r,$$

mis on täpselt antud silindri raadius.

Kui niiviisi pandud pallide peale asetada neljas pall, siis pallide keskpunktide ühendamisel tekib tetraeeder $ABCD$, kus D on neljanda palli keskpunkt. Tetraeedri kõrgus oleks $DK = \sqrt{(AD)^2 - (AK)^2} = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2} = \sqrt{\frac{24r^2}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$.

Sellise paigutuse korral tuleb silindri kõrguseks $2r + \frac{2\sqrt{6}}{3}r = \frac{6+2\sqrt{6}}{3}r \approx 3,63r$.

Kui aga panna silindri põhja kaks palli ja 2 palli nende peale, nii et kõik neli palli puudutavad silindri külgpinda, siis tuleb silindri kõrgus väiksem. Silindri kõrgus oleks $h = OK + KL + LH$, kus $OK = LH = r$. KL leidmiseks vaatleme esmalt kolmnurka BCD, mis on võrdhaarne, sest $BC = BD = 2r$. Seega kolmnurk BCL on täisnurkne ja $BC = 2r$ ning $CL = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)r - r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$. Kolmanda külje pikkuse leiame Pythagorase teoreemi põhjal



$$BL = \sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}r.$$

Seejärel vaatleme kolmnurka BKL, mis on täisnurkne, sest BK on paralleelne põhjaga ja seetõttu risti silindri teljega. Eelnevalt on leitud, et $BL = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$. Leiame $BK = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)r - r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$. Pythagorase teoreemi põhjal saame kolmanda külje pikkuseks

$$KL = \sqrt{BL^2 - BK^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}r\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Seega karbi kõrgus $h = r + \frac{2\sqrt{3}}{3}r + r = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}r \approx 3,15r$.

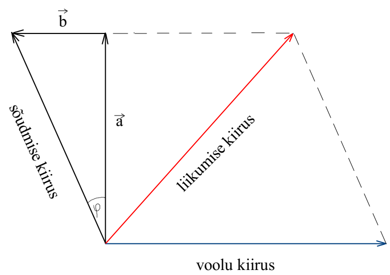
Vastus: Karbi vähim kõrgus on $h = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}r$.

Ülesande 5 lahendus (Liivi Kluge).

Kasutame ühikutena kilomeetreid ja tunde. Arvutused sooritame ühikuvabalt. Mees suudab sõuda kiirusega 8.

Oletame, et mees aerutab veidi vastuvoolu, olgu nurk ristsuunaga võrreldes φ. Jagame kiirusvektori kaheks komponendiks: vastuvoolu liikumise komponendiks ja sellega ristsuunas liikumise komponendiks. Risti üle jõe on kiiruskomponendi pikkus on $a = 8\cos\varphi$ ja vastuvoolu on kiiruskomponent $b = 8\sin\varphi$. Kuna paadile mõjub ka vee voolamise kiirus, siis kokku liigub paat voolusuunas edasi kiirusega

$$9 - b = 9 - 8\sin\varphi.$$



Ühtlase kiiruse ja suunaga aerutades jõuab mees üle jõe ajaga $t_1 = \frac{0{,}24}{a} = \frac{0{,}24}{8\cos\varphi} = \frac{0{,}03}{\cos\varphi}$, selle ajaga triivib ta mööda jõge edasi kaugusele

$$s = \frac{0,03}{\cos\varphi} \cdot (9 - 8\sin\varphi).$$

Nüüd tuleb paat transportida mööda kallast tagasi kaugusele s. Kuna paadi mööda maad transportimise kiirus on $0,2$, siis vajalikku punkti tagasi (risti üle jõe) jõudmiseks kulub aega

$$t_2 = \frac{s}{0,2} = \frac{0,03}{0,2 \cdot \cos\varphi}(9 - 8\sin\varphi) = \frac{0,15 \cdot (9 - 8\sin\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{1,35 - 1,2\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Kokku kulub aega

$$T = t_1 + t_2 = \frac{0,03}{\cos\varphi} + \frac{1,35 - 1,2\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1,38 - 1,2\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Tahame, et see aeg oleks minimaalne. Leiame tuletise

$$T' = \frac{-1,2\cos\varphi \cdot \cos\varphi - (1,38 - 1,2\sin\varphi)(-\sin\varphi)}{\cos^2\varphi} = \frac{-1,2\cos^2\varphi + 1,38\sin\varphi - 1,2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{1,38\sin\varphi - 1,2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi} = \frac{1,38\sin\varphi - 1,2}{\cos^2\varphi}.$$

Statsionaarsed punktid saame, kui

$$1,38\sin\varphi - 1,2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1,2}{1,38} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\frac{1,2}{1,38} \approx 60,4^o$$

Ülejäänud kriitiliste punktide korral on $\cos\varphi = 0$, seega $a = 0$ ja ei ole võimalik üle jõe jõuda.
Kui $\sin\varphi = \frac{12}{13,8}$, siis

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{1,2}{1,38}\right)^2} = \sqrt{\frac{1,38^2 - 1,2^2}{1,38^2}} = \frac{\sqrt{0,4644}}{1,38}$$

ja sellise nurga all aerutades kulub lõpp-punkti kohalejõudmiseks aega

$$T = \frac{1,38 - 1,2\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1,38 - 1,2 \cdot \frac{1,2}{1,38}}{\frac{\sqrt{0,4644}}{1,38}} = \frac{\frac{1,38^2 - 1,2^2}{1,38}}{\frac{\sqrt{0,4644}}{1,38}} = \sqrt{0,4644} \approx 0,68.$$

Vastus: Aega kulub 0,68 tundi ehk 40,8 minutit ja aerutada tuleb vastuvoolu suunas, mis moodustab jõe ületamise ristsuunaga nurga $60,4^o$.

Ülesande 6 lahendus (Pilve Uussaar).
Selleks, et muutumispiirkond sisaldaks arvu 2 peab y=2. Saame

$$\frac{\sin x + a}{\cos 2x - 2} = 2$$

Korrutame mõlemaid pooli $\cos 2x - 2$, sest $\cos 2x \neq 2$, kuna $\cos 2x \in [-1;1]$.

$$\sin x + a = 2\cos 2x - 4$$

Teisendame saadud avaldise ruutvõrrandiks:

$$\sin x + a = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4$$

$$\sin x + a = 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) - 4$$

$$\sin x + a = 2 - 4\sin^2 x - 4$$

$$4\sin^2 x + \sin x + (a+2) = 0$$

Lahendame saadud ruuvõrrandi:

$$\sin x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4(a+2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-16a - 31}}{8}$$

Siit saame leida x väärtused, kui $-16a - 31 \geq 0$ ja $\sin x \in [-1; 1]$.
Esimesest tingimusest saame, et

$$-16a \geq 31 \iff a \leq -\frac{31}{16}.$$

Edaspidi eeldame, et $a \leq -\frac{31}{16}$ ja leiame lisatingimused a väärtustele teisest tingimusest:

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Asendame $\sin x$ ja teisendame seda ahelvõrratust

$$-1 \leq \frac{-1 \pm \sqrt{-16a - 31}}{8} \leq 1 \,|\cdot 8$$

$$-8 \leq -1 \pm \sqrt{-16a - 31} \leq 8 \,| + 1$$

$$-7 \leq \pm\sqrt{-16a - 31} \leq 9$$

Meile piisab, kui kasvõi üks $\sin x$ annab lahendi, selleks on vaja, et
$-7 \leq \sqrt{-16a - 31} \leq 9$ või $-7 \leq -\sqrt{-16a - 31} \leq 9$.
Lahendame esimese võrratustesüsteemi.

$$\begin{cases} \sqrt{-16a - 31} \geq -7 \\ \sqrt{-16a - 31} \leq 9 \end{cases}$$

Kuna $\sqrt{-16a - 31} \geq 0$ iga a korral (kui $a \leq -\frac{31}{16}$), siis ka $\sqrt{-16a - 31} \geq -7$ iga sellise a korral. Samal põhjusel, et $\sqrt{-16a - 31} \geq 0$ iga a korral võime teise võrratuse tõsta ruutu ning saame, et

$$-16a - 31 \leq 81 \iff -16a \leq 112 \iff a \geq -7$$

Arvestades, et $a \leq -\frac{31}{16}$, saame võimalikeks parameetri väärtusteks $a \in [-7; -\frac{31}{16}]$.
Lahendame teise võrratustesüsteemi.

$$\begin{cases} -\sqrt{-16a - 31} \geq -7 \\ -\sqrt{-16a - 31} \leq 9 \end{cases}$$

Kuna $\sqrt{-16a - 31} \geq 0$ iga a korral, siis ka $-\sqrt{-16a - 31} \leq 9$ iga a korral. Korrutame esimese võrratuse -1-ga ning kuna siis on mõlemad pooled mittenegatiivsed, saame tõsta need ruutu.

$$\sqrt{-16a - 31} \leq 7 \iff -16a - 31 \leq 49 \iff -16a \leq 80 \iff a \geq -5$$

Arvestades, et $a \leq -\frac{31}{16}$, saame võimalikeks parameetri väärtusteks $a \in [-5; -\frac{31}{16}]$.

Oleme saanud, et $a \in [-7; -\frac{31}{16}]$ või $a \in [-5; -\frac{31}{16}]$. Seega võrratuse muutumispiirkond sisaldab arvu 2, kui vähemalt üks nendest tingimustest on täidetud ehk $a \in [-7; -\frac{31}{16}]$.