Tallinna Tehnikaülikool

Matemaatilise analüüsi ja lineaaralgebra rakenduslikud ülesanded

Tallinn 2026

Autorite kollektiiv:

Jaan Janno
Aleksander Klauson
Hendrik Naar
Andres Braunbrück
Madis Ratassepp
Alar Leibak
Liivi Kluge
Jüri Kurvits
Mati Väljas

Ülesannete kogu loodi Euroopa Sotsiaalfondi programmi „Inseneriakadeemia ja IT Akadeemia kõrghariduses" Inseneriakadeemia raames. Tegevust kaasrahastas Euroopa Liit.







© Tallinna Tehnikaülkool ja autorid, Tallinn 2026

Sisukord

Sisukord **3**

1. Matemaatiline analüüs **5**

1.1. Funktsioon, funktsiooni piirväärtus ja pidevus 5
1.2. Tuletis ja diferentsiaal 18
1.3. Ekstreemumite leidmine 30
1.4. Määramata integraal 38
1.5. Määratud integraal ja selle rakendused 43
1.6. Mitme muutuja funktsioonid 65
1.7. Osatuletised ja täisdiferentsiaal 67
1.8. Kordsed integraalid 77
1.9. Joon- ja pindintegraalid 99
1.10. Fourier asjad 117
1.11. Harilikud diferentsiaalvõrrandid 119

2. Lineaaralgebra **149**

2.1. Kompleksarvud, kvaterioonid 149
2.2. Maatriksid, astak, determinandid 154

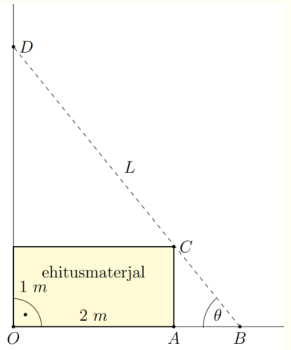
2.2.1. Kolmemõõtmelise keha esitamine kahemõõtmelisel joonisel 167
2.3. Lineaarsed, võrrandisüsteemid, Gaussi meetod, pseudolahend 172
2.3.1. Tasapinnalise raami toerektsioonid arvutamine . . . 200
2.4. Vektorruum, lineaarne sõltuvus, baas 206
2.5. Afiinne ruum 214
2.6. Sirged ja tasandid 220
2.6.1. Jõusüsteemi taandamine ja selle tsentraaltelg 230
2.7. Teist järku jooned ja pinnad 238
2.8. Omaväärtused, omavektorid 251
2.8.1. Pingetensor ja omaväärtusülesanne 262

Indeks **269**

1 Matemaatiline analüüs

1.1. Funktsioon, funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Ül 1.1. Ehitusplatsil on hoone seina äärde ladustatud ehitusmaterjal (vt. joonis), kusjuures selle kuhja laius ja kõrgus on vastavalt 2 m ja 1 m. Teatud tööde teostamiseks hoone seinal asetatakse redel selliselt, et redeli ülemine ots toetub seinale, redeli alumine ots on maapinnal ja redel puutub ladustatud ehitusmaterjali.
NB! Libisemise vältimiseks fikseeritakse redeli asukoht maapinnal vaiadega. Esitage redeli pikkus $L = L(\theta)$ funktsioonina nurgast θ, mille redel moodustab maapinnaga. Leidke selle funktsiooni määramispiirkond X.



Lahendus. Redeli pikkuse L (joonisel lõigu BD pikkus) saame avaldada täisnurksest kolmnurgast OBD.

$$L = BD = \frac{OB}{\cos\theta} = \frac{2 + AB}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta} + \frac{AB}{\cos\theta}.$$

Kolmnurgast ABC avaldame lõigu AB pikkuse

$$AB = \frac{1}{\tan\theta}.$$

Asendadaes saadu tulemuse suuruse L avaldisse saame

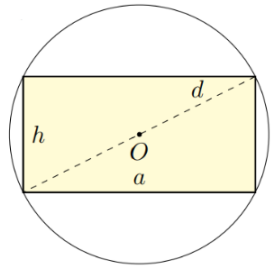
$$L(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.$$

Ilmselt $\theta > 0$ (kui $\theta = 0$, siis on redel paralleelne seinaga ja $\theta < \frac{\pi}{2}$. Järelikult otsitava funktsiooni $L(\theta)$ määramispiiekonnaks on vahemik $X = [0,\ \frac{\pi}{2}]$,

Vastus: $L(\theta) = \dfrac{2}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$, $X = [0,\ \frac{\pi}{2}]$.

Ül 1.2. Ümarpalgist läbimõõduga d saetakse välja ristkülikukujulise ristlõikega tala, kusjuures tala ristlõige on maksimaalse pindalaga. Tala kandejõud F on võdeline aluse a ja kõrguse h ruudu korrutisega (olgu selleks võrdeteguriks κ). Esitage tala kandejõud F funktsioonina tala alusest a eeldusel, et palgi läbimõõt d on fikseeritud. Leidke selle funktsiooni määramispiirkond X.

Lahendus. Ülesande kirjeldusele vastav joonis on



Kõrgus h avaldub aluse a kaudu $h(a) = \sqrt{d^2 - a^2}$. Järelikult tala kandejõud on

$$F(a) = \kappa \cdot a \cdot \big(h(a)\big)^2 = \kappa \cdot a \cdot (d^2 - a^2).$$

Ilmselt a ei saa olla negatiivne ega suurem palgi diameetrist d, seega $X = [0,\ d]$.

Vastus: $F(a) = \kappa \cdot a \cdot (d^2 - a^2)$, $X = [0,\ d]$.

Ül 1.3. Alar Leibak Avaldage tala (vt ül 1.2) kandejõu muut ΔF aluse muudu Δa kaudu. Uurige tala kandejõu muutumist punktides $a = \frac{d}{2}$ ja $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ ning skitseeige vastavad graafikud.

Lahendus. Funktsiooni muudu ΔF arvutamiseks tuleb arvutada funktsioon väärtuste vahe

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(a+\Delta a) - F(a) = \\ &= \kappa(a+\Delta a)\big(d^2 - (a+\Delta a)^2\big) - \kappa a(d^2 - a^2) = \\ &= \kappa\big[\Delta a\big(d^2 - 3a^2\big) - \Delta a^2(3a + \Delta a)\big]\end{aligned}$$

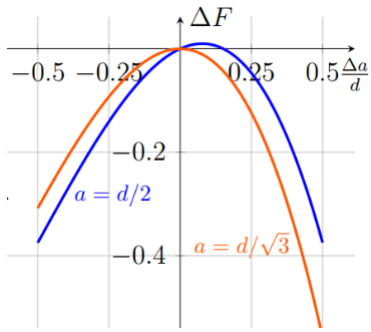
Punktis $a = \frac{d}{2}$ on tala kandejõu muut ΔF seega

$$\begin{aligned}\Delta F\Big|_{a=d/2} &= \kappa\Big(\Delta a\big(d^2 - \frac{3d^2}{4}\big) - \Delta a^2\big(\frac{3d}{2} + \Delta a\big)\Big) = \\ &= \kappa\Delta a\Big(\frac{d^2}{4} - \Delta a\frac{3d}{2} - \Delta a^2\Big).\end{aligned}$$

Vastav graafik on joonisel kujutatud sinise värviga.
Punktis $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ on tala kandejõu muut

$$\begin{aligned}\Delta F\Big|_{a=d/\sqrt{3}} &= \kappa\Big(\Delta a\big(d^2 - \frac{3d^2}{3}\big) - \Delta a^2\big(\frac{3d}{\sqrt{3}} + \Delta a\big)\Big) = \\ &= -\kappa\Delta a^2\Big(\sqrt{3}\,d + \Delta a\Big).\end{aligned}$$

Näeme, et Δa muutudes (ehk ristlõike laiuse muutudes) tala kandejõud alati väheneb. Kandejõu muut punktis $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ on kujutatud joonisel oranži värviga.



Ül 1.4. Otsustage, kas ülesandes **(1.2)** leitud tala kandejõud F on pidev funktsioon tala ristõike laiusest a.

Lahendus. **I variant.** Funktsioon

$$F(a) = \kappa \cdot a \cdot (d^2 - a^2)$$

on kogu reaalarvuse hulgal määratud elemantaarfunktsioon. Kuna iga ielentaarfunktsioon on pidev oma määramispiirkonna sisepunktides, siis tala kandejõud F on pidev funktsioon lõigul $[0,\, d]$.

II variant. Fikseerime punkti $a \in [0,\, d]$ ja arvutame piirväärtuse

$$\lim_{\Delta a \to 0} \Delta F = \lim_{\Delta a \to 0} \big[F(a + \Delta a) - F(a)\big] =$$

$$= \lim_{\Delta a \to 0} \big[\kappa(a + \Delta a)\big(d^2 - (a + \Delta a)^2\big) - \kappa a(d^2 - a^2)\big] =$$

$$= \lim_{\Delta a \to 0} \kappa\big[\Delta a\big(d^2 - 3a^2\big) - \Delta a^2(3a + \Delta a)\big] = 0.$$

Saadud võrdus kehib vahemiku $(0,\, d)$ suvalises punktis a. Vahemiku otspunktides $a = 0$ või $a = d$ uurime ühepoolseid pidevusi:

$$a = 0: \qquad \lim_{\Delta a \to 0} \Delta F = \lim_{\Delta a \to 0} \kappa\big[\Delta a\big(d^2 - 3 \cdot 0^2\big) - \Delta a^2(3 \cdot 0 + \Delta a)\big] = 0,$$

$$a = d: \qquad \lim_{\Delta a \to 0} \Delta F = \lim_{\Delta a \to 0} \kappa\big[\Delta a\big(d^2 - 3 \cdot d^2\big) - \Delta a^2(3 \cdot d + \Delta a)\big] = 0.$$

Definitsiooni põhjal on tegemist pideva funktsiooniga lõigul $[0,\, d]$.

Vastus: Funktsioon $F(a)$ on pidev lõigul $[0,\, d]$.

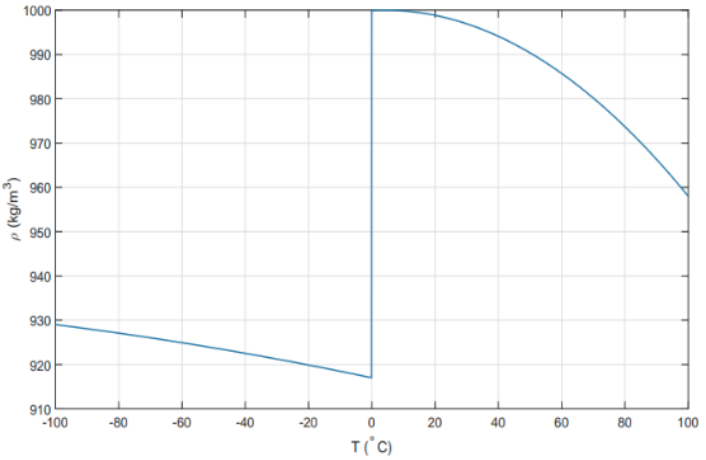
Ül 1.5. Jaan Janno Puhta vee tihedus sõltuvalt temperatuurist on ruutlähenduses järgmine:

$$\rho = \begin{cases} 917 - 0.15\,T - 0.0003\,T^2, & \text{kui } -273.15 < T < 0 \\ 1000 - \frac{42}{96^2}(4-T)^2, & \text{kui } 0 < T < 100. \end{cases}$$

kus tiheduse ρ ühik on $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ja temperatuuri ühik on °C. Skitseerida funktsiooni $\rho(T)$ graafik $T \in [-100, 100]$. Mis liiki katkevuspunkt on funktsioonil $\rho(T)$ argumendi väärtuse $T = 0$ korral. Arvutada ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{T\to 0-} \rho(T) \quad \text{ja} \quad \lim_{T\to 0+} \rho(T).$$

Lahendus. Graafik

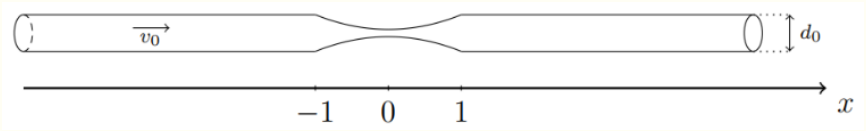


Punktis $T = 0$ on esimest liiki katkevuspunkt, hüppekoht. Ühepoolsed piirväärtused:

$$\lim_{T\to 0-} \rho(T) = 917 \quad \text{ja} \quad \lim_{T\to 0+} \rho(T) = 1000 - \frac{42 \cdot 16}{96^2} \approx 999.93.$$

Vastus: Funktsioonil $\rho(T)$ on punktis $T = 0$ esimset liiki katkevus.

Ül 1.6. Ringikujulise ristlõikega torul diameetriga d_0 on vahemikus $x \in (-1,\, 1)$ kitsend (vt joonist). Kitsendi ristlõige on samuti ringikujuline, selle diameeter sõltub koordinaadist x ja avaldub valemiga $d(x) = d_0 + a(x^2 - 1)$, kus a on mingi arv vahemikus $(0,\, d_0)$. Torus voolab vedelik, mille kiirus kitsenemata osas on v_0. Avaldada vedeliku kiirus $v(x)$ kitsenenud osas. Mis liiki funktsiooniga on tegemist (polünoom, ratsionaalfunktsioon, eksponentfunktsioon vms)? Millise a väärtuse korral on maksimaalne kiirus $2v_0$?



Lahendus. Kui torus voolava vedeliku kiirus on v, tihedus on ϱ ja toru ristlõike pindala on S siis toru ristlõigetr ajaühikus läbiva vedeliku mass on $\varrho S v$.

Olgu vaadeldava toru ristlõike pindala kitsenemate osas S_0 ja kitsenenud osas $S(x)$. Massi jäävuse põhjal saame võrduse

$$\varrho S_0 v_0 = \varrho S(x) v(x), \quad x \in (-1,\, 1).$$

Seega

$$S_0 v_0 = S(x) v(x), \quad x \in (-1,\, 1)$$

ja

$$v(x) = \frac{S_0\, v_0}{S(x)}, \quad x \in (-1,\, 1).$$

Kuna $\dfrac{S_0}{S(x)} = \left(\dfrac{d_0}{d(x)}\right)^2$, saame järgmise valemi $v(x)$ jaoks:

$$v(x) = \frac{d_0^2\, v_0}{d^2(x)} = \frac{d_0^2\, v_0}{[d_0 + a(x^2 - 1)]^2}, \quad x \in (-1,\, 1).$$

Näeme, et funktsioon $v(x)$ on ratsionaalfunktsioon.

Leitud kiirus on maksimaalne $x = 0$ korral. Siis $v(0) = \dfrac{d_0^2\, v_0}{[d_0 - a]^2}$. Lahendades võrrandi $\dfrac{d_0^2\, v_0}{[d_0 - a]^2} = 2v_0$ muutuja a suhtes, saame $a = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})d_0$.

Vastus: Funktsioon $v(x)$ on ratsionaalfunktsioon ja kiirus $2v_0$ saavutatakse siis, kui kordaja $a = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})d_0$.

Ül 1.7. Teatud ehituskauba nõudlus- ja pakkumisfunktsioonid on

$$D_t = 100 - 4p_t,$$
$$S_t = 50 + p_{t-1},$$

kus

D_t – on nõudlus (ühikutes) perioodil t,
S_t – on pakkumine (ühikutes) perioodil $t-1$,

p_t, p_{t-1} on toote hind vastavalt perioodil t ja $t-1$. Eeldades, et nõudmine ja pakkumine on tasakaalus $D_t = S_t$, leidke kauba piirhind p^*. Näidake, et toote hind perioodil t avaldub kujul

$$p_t = \Big(-\frac{1}{4}\Big)^t + 10. \tag{1.1}$$

Lahendus. Piirhinna p^* leidmiseks arvutame piirväärtuse võrduse $D_t = S_t$ mõlemalt poolt

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty}(100 - 4p_t) &= 100 - 4p^*, \\ \lim_{t\to+\infty}(50 + p_{t-1}) &= 50 + p^* \end{aligned}$$

ja saame võrduse $100 - 4p^* = 50 + p^*$. Selle võrrandi lahendiks on piirhind $p^* = 10€$.

Ülesande teise poole lahendamiseks asendame hinna p_t valemi (1.1) nõudlus- ja pakkumisfunktsiooni D_t ja S_t avaldisse ning näitame, et kehtib võrdus $D_t = S_t$:

$$\begin{aligned} D_t &= 100 - 4\cdot\left(\Big(-\frac{1}{4}\Big)^t + 10\right) = 60 + \Big(-\frac{1}{4}\Big)^{t-1}, \\ S_t &= 50 + \Big(-\frac{1}{4}\Big)^{t-1} + 10 = 60 + \Big(-\frac{1}{4}\Big)^{t-1}. \end{aligned}$$

Vastus: Piirhind $p^* = 10€$ ja $D_t = S_t$.

Ül 1.8. Vintpall on üks eksootilisemaid viskeid pesapallis. Lööjad kirjeldavad seda kui palli, mis liigub ettearvamatult vasakule, paremale, üles või alla. Tüüpilise vintpalli liikumise kiiruse juures $27\frac{m}{s}$ on palli horisontaalne (vasak/parem) asukoht löögiruudus (cm) antud valemiga:

$$f(\omega) = 2.54[\frac{1.7}{\omega} - \frac{5}{8\omega^2}\sin(2.72\omega)],$$

kus ω on palli pöörlemise kiirus radiaani sekundis. Leia, milline on lööja jaoks kõige sobivam palli pöörlemise kiirus ja milline on kõige sobivam palli pöörlemise kiirus viskaja jaoks. Joonista palli kõrvalekalde graafik sõltuvalt pöörlemise sagedusest ja vajadusel kasuta piirväärtuse leidmist kõrvalekalde arvutamiseks.



Lahendus. Esitame palli kõrvalekalde graafiku sõltuvalt sagedusest ω. Graafikult on näha, et viskaja jaoks kõige sobivam palli pöörlemise kiirus on $\omega \approx 1$ rad/s juures ja lööja jaoks, kui pall ei pöörle. Siiski, me ei saa hetkel väita, et kui pall ei pöörle, siis on palli kõrvalekalle täpselt 0, sest meil tekib avaldises 0-ga jagamine.

Veendume selles, leides piirväärtuse, kui palli pöörlemise kiirus läheneb 0-le.

$$\lim_{\omega \to +0}[\frac{1.7}{\omega} - \frac{5}{8\omega^2}\sin(2.72\omega)]$$

Teades, et

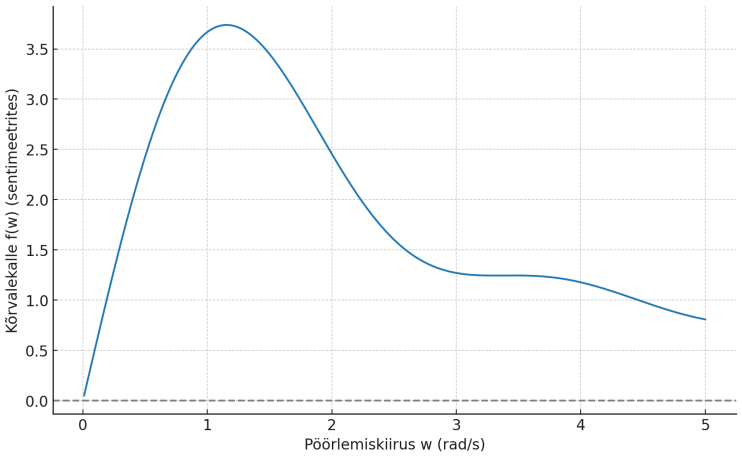
$$\lim_{\omega \to 0}\frac{\sin(2.72\omega)}{2.72\omega} = 1$$

saame avaldada järgmiselt

$$\lim_{\omega\to+0}\frac{1.7}{\omega}-\lim_{\omega\to+0}\frac{5\cdot 2.72}{8\omega}\frac{\sin(2.72\omega)}{2.72\omega}=$$

$$\lim_{\omega\to+0}[\frac{1.7}{\omega}-\frac{1.7}{\omega}]=0$$

ehk tõesti kõrvalekalle $f(\omega)$ on null, kui $\omega=0$.



Vastus: Kui palli pöörlemiskiirus $\omega\to 0$, siis kõrvalekalle $f(\omega)\to 0$.

Ül 1.9. Vundamendi aluse pinnase vajumine on antud seosega

$$s(x)=\frac{4x^3-3x^2+2x-3}{x-1}$$

(millimeetrites), kus x tähistab pinnase sügavust meetrites. Leida vajumi väärtus, kui x läheneb ühele meetrile.

Lahendus. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-3x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(4x^3-3x^2+2x-3)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{12x^2-6x+2}{1}=8.$$

Vastus: Vajumi väärtus on 8 mm.

Ül 1.10. Leidke pingejaoturi (vt joonis) takistil R_3 olev pinge väärtus $U(R_2)$ sõltuvalt muuttakisti R_2 väärtusest ($0 \leqslant R_2 \leqslant R_{2max}$) ja skitseerige selle funktsiooni graafik.

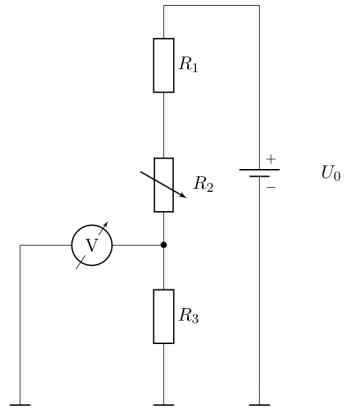
Lahendus. Kasutame Ohmi seadust

$$U = IR,$$

kus I on voolutugevus ja R on takistus. Seega

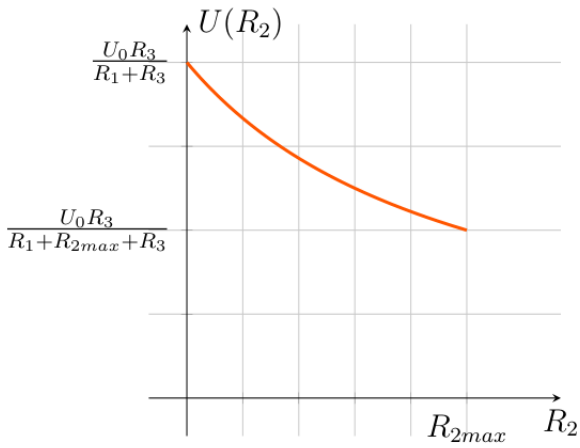
$$U(R_2) = IR_3 = \frac{U_0}{R_1 + R_2 + R_3} R_3,$$

kus U_0 on toiteallika pinge ja $R_1+R_2+R_3$ on jadaühenduse kogutakistus.



Pingejaotur

Selle funktsiooni graafik on allpool oleval joonisel.



Ül 1.11. Ehitusettevõttel on remondifond, kuhu on kogunenud 200 000 eurot. Järgmise nelja kuu jooksul pole plaanis seda raha kasutada ning see hoitakse pangas tähtajalisel hoiusel, kus intressi arvestatakse *liitintressi* meetodil aastase intressimääraga 3%. Intress kapitaliseeritakse iga kuu lõpus. Nelja kuu jooksul on igakuised inflatsioonimäärad vastavalt 1,5%, 2,1%, 0,8% ja 1,8%.

1. Leia remondifondi **nominaalne tulevikuväärtus** ja **nominaalne juurdekasv** nelja kuu pärast.
2. Arvuta nelja kuu **hinnaindeks**.
3. Leia remondifondi **reaalne tulevikuväärtus** ja **reaalne juurdekasv**.

Lahendus. **1. Nominaalne tulevikuväärtus ja nominaalne juurdekasv** Põhisumma on $P = 200\,000$ eurot, aastane intressimäär $r = 0{,}03$. Intress kapitaliseeritakse iga kuu lõpus, seega on kuine intressimäär

$$i = \frac{r}{12} = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025.$$

Perioode on $n = 4$ (neli kuud). Liitintressi korral on tulevikuväärtus

$$S = P(1+i)^n.$$

$$S = 200\,000 \cdot (1 + 0{,}0025)^4 \approx 200\,000 \cdot 1{,}01003756 \approx 202\,007{,}51 \text{ eurot.}$$

Nominaalne juurdekasv on

$$S - P \approx 202\,007{,}51 - 200\,000 = 2\,007{,}51 \text{ eurot.}$$

2. Hinnaindeks nelja kuu jooksul Inflatsioonimäärad on

$$h_1 = 1{,}5\%, \quad h_2 = 2{,}1\%, \quad h_3 = 0{,}8\%, \quad h_4 = 1{,}8\%.$$

Seega hinnaindeks on

$$\begin{aligned} I_p &= 100 \cdot (1 + h_1/100)(1 + h_2/100)(1 + h_3/100)(1 + h_4/100) = \\ &= 100 \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}018 \approx 106{,}34. \end{aligned}$$

3. Reaalne tulevikuväärtus ja reaalne juurdekasv Reaalne tulevikuväärtus leitakse valemiga

$$C = S \cdot \frac{100}{I_p},$$

kus S on nominaalne tulevikuväärtus ja I_p hinnaindeks.

$$C \approx 202\,007{,}51 \cdot \frac{100}{106{,}34} \approx 202\,007{,}51 \cdot 0{,}9407 \approx 189\,963{,}9 \text{ eurot.}$$

Reaalne juurdekasv on

$$C - P \approx 189\,963{,}9 - 200\,000 \approx -10\,036{,}1 \text{ eurot.}$$

Seega kuigi nominaalselt suurenes remondifond umbes 2 007,51 euro võrra, on inflatsiooni tõttu fondi *reaalne ostujõud* vähenenud ligikaudu 10 036 euro võrra.

Vastus: Nominaalne juurdekasv on 2 007,51 eurot, reaalne juurdekasv $-10\,036$ eurot.

Ül 1.12. Ehitusfirma plaanib rajada väikese kortermaja. Esialgse eelarve järgi tuleb krundi ostuks, projekteerimiseks ja ehituse alustamiseks kohe (ajahetkel $t = 0$) teha 2,0 miljoni euro suurune väljaminek. Ehituse käigus selgub, et materjalide hinnatõus ja projekti muudatused põhjustavad lisakulusid 0,2 miljonit eurot nii esimese kui ka teise aasta lõpus.

Pärast maja valmimist hakatakse kortereid välja üürima. Alates kolmanda aasta lõpust kuni kaheksanda aasta lõpuni eeldatakse iga-aastaseks *kasumiks* (üüri-laekumised miinus jooksvad kulud) 0,6 miljonit eurot.

Ehituse finantseerimiseks kasutatav kapital maksab firmale 8% aastas (diskontomäär $k = 0{,}08$).

1. Koosta projekti rahavoogude skeem aastate 0–8 kohta.
2. Arvuta projekti nüüdispuhasväärtus NPV diskontomääraga $k = 8\%$.
3. Tõlgenda saadud NPV-d: kui suur on projekti "tegelik väärtus" tänases rahas ning kas sellistes tingimustes on projekti mõistlik ellu viia?

***Lahendus.* 1.** Rahavood (miljonites eurodes) aastate kaupa:

Aasta t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Rahavoog R_t	−2,0	−0,2	−0,2	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

Esimesel kolmel aastal on rahavood negatiivsed (investeeringud ja lisakulud), seejärel positiivsed (üürist saadav kasum).

2. Nüüdispuhasväärtuse definitsiooni järgi

$$NPV = \sum_{t=0}^{8} \frac{R_t}{(1+k)^t},$$

kus $k = 0{,}08$.
Kirjutame summa lahti (miljonites eurodes):

$$NPV = \frac{-2{,}0}{(1{,}08)^0} + \frac{-0{,}2}{(1{,}08)^1} + \frac{-0{,}2}{(1{,}08)^2} + \sum_{t=3}^{8} \frac{0{,}6}{(1{,}08)^t}.$$

Viimased kuus positiivset rahavoogu moodustavad tavaannuiteedi suurusega $R = 0{,}6$ miljonit eurot, kestusega $n = 6$ aastat, mille esimene makse toimub ajahetkel $t = 3$. Kõigepealt leiame selle annuiteedi nüüdisväärtuse ajahetkel $t = 2$:

$$PV_{t=2} = R \cdot \frac{1-(1+k)^{-n}}{k} = 0{,}6 \cdot \frac{1-(1{,}08)^{-6}}{0{,}08} \approx 2{,}774 \text{ miljonit eurot.}$$

Toome selle väärtuse ajahetkele $t = 0$:

$$PV_{t=0} = \frac{PV_{t=2}}{(1{,}08)^2} \approx \frac{2{,}774}{1{,}08^2} \approx 2{,}378 \text{ miljonit eurot.}$$

Seega kogu projekti nüüdispuhasväärtus on

$$NPV \approx -2{,}0 - \frac{0{,}2}{1{,}08} - \frac{0{,}2}{1{,}08^2} + 2{,}378.$$

Arvutame ligikaudsed väärtused:

$$\frac{0{,}2}{1{,}08} \approx 0{,}185, \qquad \frac{0{,}2}{1{,}08^2} \approx 0{,}171,$$

seega

$$NPV \approx -2{,}0 - 0{,}185 - 0{,}171 + 2{,}378 \approx 0{,}021 \text{ miljonit eurot}$$

ehk

$$NPV \approx 0{,}021 \cdot 10^6 \text{ €} \approx 21\,400 \text{ €}.$$

3. Nüüdispuhasväärtus on positiivne, $NPV \approx 21\,000$ eurot. See tähendab, et kui diskonteerime kõik tulevased rahavood 8% diskontomääraga tänasesse päeva, siis ületab projekti tulevikukassavoogude nüüdisväärtus esialgset investeeringut ligikaudu 21 tuhande euro võrra.

Teisisõnu on ehitusprojekti *tegelik väärtus tänases rahas* umbes 21 tuhat eurot suurem kui vajalik alginvesteering. Seega on projekt antud eelduste ja diskontomäära korral napilt tasuv ning selle ellurakendamine on majanduslikult põhjendatud, eeldusel, et lisariske (materjalide hinnatõusu jätkumine, tühjad korterid jms) hinnatakse vastuvõetavaks.

1.2. Tuletis ja diferentsiaal

Ül 1.13. Keha liikumise avaldis on $x(t) = 3t^2 + 4t + 7$ (m). Arvuta keha kiirus ja kiirendus ajahetkel $t = 1$ s.

Lahendus. Kiirus on keha asukoha tuletis ajas

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 4t + 7) = 6t + 4.$$

Seega kiirus $v(1) = 10$ m/s. Kiirendus on kiiruse $v = v(t)$ tuletis

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t + 4) = 6 \text{ m/s}^2.$$

Vastus: Keha kiirus ajahetkel $t = 1$ on $v = 10$ m/s ja kiirendus $a = 6$ m/s^2.

Ül 1.14. Keha alustab liikumist ajahetkel $t = 0$ mingi algkiirusega. Keha asukohta kirjeldab avaldis

$$x(t) = -\frac{2}{3}t^2 + 16t + 2.$$

Leia keha algkiirus ja aeg, mille jooksul keha jääb seisma. Mis on keha kiirendus, kui ta seisma jääb?

Lahendus. Keha kiirus on asukoha tuletis aja järgi

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(-\frac{2}{3}t^2 + 16t + 2\Big) = -\frac{4}{3}t + 16.$$

Ajahetkel $t = 0$ on algkiirus $v(0) = -\frac{4}{3} \cdot 0 + 16 = 16$ m/s.
Keha jääb seisma, kui kiirus $v = 0$

$$-\frac{4}{3}t + 16 = 0 \Rightarrow t = 12s.$$

Keha kiirendus on kiiruse tuletis

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(-4/3t + 16\Big) = -\frac{4}{3} \text{ m/s}^2.$$

Keha kiirendus on konstantne ja paigalseisus on see $-\frac{4}{3}$ m/s^2.

Vastus: Keha algkiirus on 16 m/s ja kiirendus peatumise hetkel $-\frac{4}{3}$ m/s^2.

Ül 1.15. On antud punkti liikumisvõrrandid

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 8t^2, \\ y = 3t^2 - 12t, \end{cases}$$

kus x ja y on esitatud meetrites ning aeg t sekundites. Leida punkti kiirus ja kiirendus ajahetkedel $t = 1\,\mathrm{s}$, $t = 2\,\mathrm{s}$ ning $t = 3\,\mathrm{s}$.

Lahendus. Koordinaadi tuletis aja t järgi on punkti liikumise kiirus vastava koordinaadi suunas

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 6t^2 - 16t\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 6t - 12\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{cases}$$

Kiiruse tuletis on kiirendus

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{v_x}{dt} = 12t - 16\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \\ a_y = \dfrac{v_y}{dt} = 6\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \end{cases}$$

Vastus: Leitud kiiruse ja kiirenduse väärtused on koondatud tabelisse.

$t\,(\mathrm{s})$	$v_x\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$	$v_y\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$	$a_x\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$	$a_y\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$
1	-10	-6	-4	6
2	-8	0	8	6
3	6	6	20	6

Ül 1.16. Mürsk liigub ballistilisel trajektooril. Mürsu liikumisvõrrand on

$$\begin{cases} x = 250t, \\ y = 430t - 4.9t^2. \end{cases}$$

Määrata mürsu lennuaeg, trajektoor, samuti mürsu kiirus ja kiirendus selle langemise hetkel ning maapinnale langemise nurk.

Lahendus. Mürsu trajektoori võrrandi leidmiseks, ellimineerime liikumisvõrrandist aja t

$$t = \frac{x}{250} \quad \Rightarrow \quad y = 1.72x - 0.0000784x^2.$$

Mürsu langemiseks kuluva aja saame liikumisvõrrandist

$$y = 430\,t - 4.9\,t^2 = 0,$$

millest leiame, et

$$t_1 = 0, \qquad t_2 \approx 87.755 \text{ s}.$$

Kiirusvektori projektsioonide leidmiseks arvutame liikumisvõrrandist tuletised

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 250 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right), \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = 430 - 9.8\,t \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right). \tag{1.2}$$

Kiirusvektori koordinaadid mürsu langemise hetjel t_2 on

$$\vec{v} \approx (250, -430) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{250^2 + (-430)^2} \approx 497$$

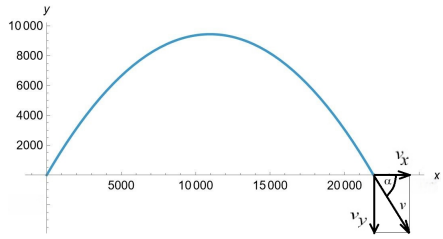
Leiame nurga α, mille kiirusvektor moodustab langemise hetkel x-teljga

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{250}{497} \approx 0.503 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 60^\circ.$$

Kiirendusvektori $\vec{a}$ projektsioonide leidmiseks arvutame kiirusvektori projektsioonidest (1.2) tuletised

$$a_x = \frac{v_x}{dt} = 0 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right), \qquad a_y = \frac{v_y}{dt} = -9.8 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right).$$

Ainus kiirendusvektori projektsioon on suunatud allapoole.



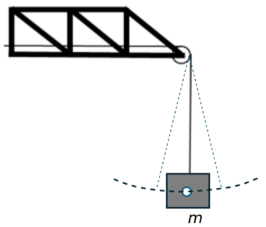
Vastus: Mürsu lennuaeg $t \approx 87.75\,\text{s}$, kiirus $v \approx 497\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, kiirendus $a = 9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja langemisnurk maapinnale on $\alpha \approx 60^\circ$.

Ül 1.17. Tornkraana tõstab keha massiga m. Tuule mõjul keha võngub amplituudiga $x_0 = 0.4\,\mathrm{m}$ ja sagedusega $f = 0.5\,\mathrm{Hz}$.
Kui suur on võnkuva keha maksimaalne kiirus ja kiirendus?

Lahendus. Keha liikumist kirjeldab harmooniline aja funktsioon:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega\, t) = x_0 \sin\left(2\pi f\, t\right)\ (\mathrm{m}),$$

kus ω on ringsagedus ja t aeg.



Ringsagedus

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 0.5 = 3,14\ \left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

Keha kiirus on

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega\, t)\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

ja kiirendus

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t)\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$$

Seega maksimaalne kiirus ja kiirendus on vastavalt

$$\begin{aligned} v_{\max} = &\quad \omega\, x_0 = &\quad 3.14 \cdot 0.4 = 1.26\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right), \\ a_{\max} = &\quad \omega^2\, x_0 = &\quad 3.14^2 \cdot 0.4 = 3.95\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right). \end{aligned}$$

Vastus: Võnkuva keha maksimaalne kiirus ja kiirendus on vastavalt $v = 1.26\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ja $a = 3.95\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Ül 1.18. Jõgi, mille laius on a ja mille kaldad on sirged ja paralleelsed, voolab otse põhja suunas kiirusega u. Punktid O ja A asuvad vastaskallastel ning punkt A on otse ida suunas punktist O. Koordinaatteljed OX ja OY on valitud vastavalt ida ja põhja suunas. Paadiga, mille kiirus vee suhtes on v, alustatakse liikumist punktist O, et ületada jõgi. Kui paati juhitakse otse ida suunas ja u muutub x-i järgi järgmiselt: $u = x(a-x)\frac{v}{a^2}$. Leida:

a) paadi trajektoori võrrand,
b) aeg jõe ületamiseks,
c) paadi absoluutne kiirus vastaskaldale jõudmisel,
d) paadi siirdevektor vastaskaldale jõudes.

Lahendus. Olgu $\vec{v}_p$ paadi kiirus jõe suhtes, $\vec{v}_j$ jõe voolamise kiirus ja $\vec{v}_{pa}$ paadi absoluutne kiirus. Siis kehtib seos

$$\vec{v}_{pa} = \vec{v}_p + \vec{v}_j,$$

milles $|\vec{v}_p| = v$ ja $|\vec{v}_j| = u$. Kiiruskomponentide seos koordinaatidega x ja y

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{x}{dt} \\ v_y &= \frac{y}{dt} = x(a-x)\frac{v}{a^2} \end{aligned}$$

Nendest võrranditest võime tuletada seose

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(a-x)}{a^2}$$

või

$$dy = \frac{x(a-x)}{a^2}dx$$

ja integreerides

$$\int_0^y dy = \int_0^y \frac{x(a-x)}{a^2}dx$$

saame

$$y = \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2}.$$

a) See on paadi trajektoori võrrand.
b) Aeg jõe ületamiseks on

$$t = \frac{a}{v_x} = a/v.$$

c) Kui paat jõuab vastaskaldale, siis $x = a$ ja $v_y = 0$. Seega paadi kiirus on $v_x = v$.
d) $y = \frac{a^2}{2a} - \frac{a^3}{3a^2} = \frac{a}{6}$. Paadi siirdevektor $(a, \frac{a}{6})$

Ül 1.19. Ehitusmaterjali tootva ettevõtte kulud avalduvad valemiga

$$C = 10^{-5}q^3 + 0.2q + 30 \text{ kEUR},$$

kus q on toodangu maht tonnides. Konkreetne toodangu maht on 100 tonni nädalas. Kasutades diferentsiaali lahendada järgmised ülesanded.

1) Millised on täiendavad kulud, et suurendada toodangu mahtu 5 tonni võrra nädalas?
2) Kui palju on võimalik suurendada toodangut, kui kulusid suurendada 2000 EUR võrra nädalas?

Lahendus. Ettevõtte kulude $C(q)$ diferentsiaal avaldub valemiga

$$dC = C'(q)dq = (3 \cdot 10^{-5}q^2 + 0.2)dq.$$

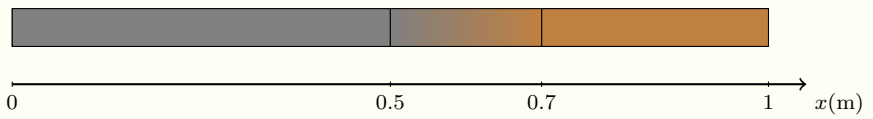
Toodangu mahu $q = 100$ korral $C'(q) = 0.5$. Seega $dC = 0.5dq$. Järelikult on C ja q muudud seotud järgmiste ligikaudsete valemitega:

$$\Delta C \approx 0.5\Delta q \quad \Leftrightarrow \quad \Delta q \approx \frac{\Delta C}{0.5}.$$

Vastus: 1) $\Delta q = 5 \Rightarrow \Delta C \approx 2500$EUR nädalas.

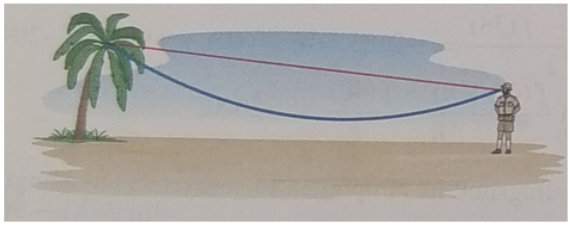
2) $\Delta C = 2 \Rightarrow \Delta q \approx 4$ tonni nädalas.

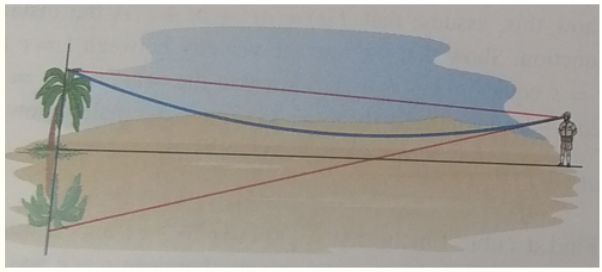
Ül 1.20. Joonisel kujutatud funktsionaalselt gradeeritud materjalist tala ruudukujulise ristlõikega 5×5cm ja pikkusega 1m koosneb kolmest osast: metall tihedusega $7800\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (hall), keraamiline materjal tihedusega $1500\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (pruun) ja gradeeritud üleminekuala nende vahel (värv muutub). Modelleerida materjali tihedust üleminekualal kuuppolünoomiga selliselt, et materjali tihedus kogu tala ulatuses muutuks sujuvalt (st tihedusfunktsioon ja tema tuletis oleksid pidevad). Joonestada tihedusfunktsiooni graafik lõigul $[0, 1]$.



Ül 1.21. Paljud optilised illusioonid on põhjustatud sellest, et meie aju (alateadlikult) kasutab puutujat objekti asukoha määramisel. Oletame, et sa asud kõrbes ja paikned 30 m kaugusel palmipuust. Näed teatud punkti, mis asub 3 m puu tüvest kõrgemal – see toimub seetõttu, et valgus peegeldub sellelt punktilt ja jõuab su silmadeni.

Tavaliselt on hea lähendus eeldada, et valgus liigub sirgjooneliselt (joonisel ülemine trajektoor). Kuid kui õhutemperatuur muutub järsult – näiteks kõrbes, kus maapinna lähedal on õhk oluliselt kuumem kui kõrgemal – siis võib valgus liikuda mitte-sirgjoonelist rada pidi. Valgus murdub, nagu on näha joonise alumisel trajektooril. Meie aju tõlgendab valguse liikumist alati sirgjooneliselt, mistõttu arvad, et see punkt puul asub $y = 3$ m, nagu ülemise trajektoori järgi, aga samal ajal ka mingil muul kõrgusel, nagu alumise trajektoori järgi. Kui alumise trajektoori kuju on kirjeldatud funktsiooniga $y = 0.00667x^2 - 0.24x + 3$, siis leia selle kõvera puutuja võrrand punktis $x = 30$ m ning näita, et see puutuja lõikab y-telge punktis $y = -3$ m. See tähendab, et "näeksid"punkti nii $y = 3$ m kui ka $y = -3$ m juures, justkui oleks tegemist ideaalse peegelpildiga.





Lahendus. Me tajume objektilt peegeldunud valguse trajektoori puutuja suunas. Puutuja võrrandi koostamiseks, leiame funktsiooni y tuletise punktis $x = 30$ m.

$$y' = \frac{d}{dx}(0.00667x^2 - 0.24x + 3) = 0.0134x - 0.24$$

$$y'(30) = 0.16$$

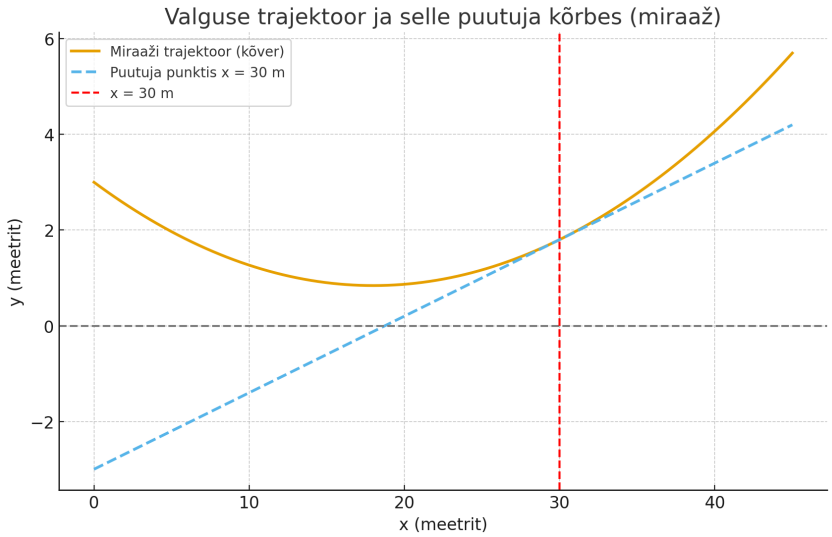
See on puutuja tõus. Puutuja sirge võrrand on

$$y = 0.16(x - 30) + 1.8$$

Leiame sellel sirgel väärtuse, kus x-telg ristub y-ga

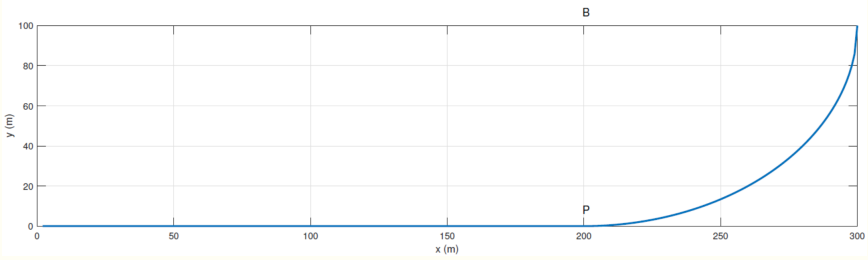
$$y(0) = -0.6 \cdot 30 + 1.8 = -3$$

See tähendab, et visuaalselt tajuksime punkti mitte ainult kõrgusel 3 m, vaid ka -3 m allpool, mis on kujutise peegeldus. See on kõrbe miraaž – illusioon, mis tekib, kui valgus murdub kuumast maapinna lähedasest õhust ülespoole liikudes.



Ül 1.22. Joonisel kujutatud maanteel läheb sirge teelõik üle ringjoone kaareks, mille keskpunkt on $B(200, 100)$ ja raadius on 100. Ilmselt ei ole selline tee ohutu, sest punktis $P(200, 0)$ tuleb rooli järsult keerata, vastasel juhul võib teelt välja sõita.

Kirjeldada maanteele vastava joone omadusi punkti P ümbruses tuletiste ja nende pidevuse abil. Täpsemalt: koostada funktsiooni $y(x)$ valem lõigul $[0, 300]$, leida $y'(x)$, $y''(x)$ ning uurida y, y' ja y'' pidevust $x = 200$ korral. Milline neist kolmest funktsioonist katkeb?



Ül 1.23. Auto, mille rattad ei haardu teekattega, jätkab kurvis liikumist mööda kurvi kirjeldava joone puutujat. Auto sõidab suure kiirusega ringraja parabooli $y = -\frac{x^2}{2} + 5$ kujulises kurvis vasakult paremale ja kaotab juhitavuse punktis $A(2, 3)$. Millises punktis sõidab auto ringraja kõrval olevasse turvavalli, kui see on paigutatud kurvi kujulisele paraboolile, mille haripunkt on 2 ühikut kõrgemal?

Ül 1.24. Auto, mille rattad ei haardu teekattega, jätkab kurvis liikumist mööda kurvi kirjeldava joone puutujat. Auto sõidab ringrajal suure kiirusega ja kaotab kurvis juhitavuse ning peatub turvavalli punktis $A(3, 6)$. Millises ringraja kurvi punktis kaotas vasakult paremale liikuv auto juhitavuse, kui kurvi kirjeldav joon on $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{2}$?

Ül 1.25. Materjali punktis kirjeldab pinget võrrand

$$\sigma(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x \text{ (Paskalites)},$$

kus x on siire meetrites. Leia pinge muutus siirde muutumisel, kui $x = 2$ m.

Lahendus. Pinge muutumist kirjeldab tuletis

$$\frac{d\sigma}{dx} = 6x^2 - 10x + 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{dx}\Big|_{x=2} = 6 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 3 = 7 \text{ Pa/m}.$$

Vastus: Siirdele 2 m vastab pinge muutus 7 Pa/m.

Ül 1.26. Ehitusel mõõdetakse värskelt valatud plaadi sisetemperatuuri. Mõõtmised annavad järgmised tulemused:

- valamise hetkel ($t = 0$ tundi) on betooni temperatuur 18°C;
- kolme tunni pärast ($t = 3$ tundi) on betooni temperatuur 32°C.

Ehituse tehniline juhend sätestab, et pragunemise vältimiseks ei tohi betooni temperatuuri muutumise kiirus ületada 2°C tunnis.

Eeldame, et betooni temperatuuri funktsioon $T(t)$ on perioodil $[0, 3]$ pidev ja vahemikus $(0, 3)$ diferentseeruv.

Näita, et nende mõõtmiste põhjal saab kindlalt väita, et teatud hetkel esimese kolme tunni jooksul ületas temperatuuri muutumise kiirus lubatud piiri 2°C tunnis.

Lahendus. Valamise hetkel on

$$T(0) = 18,$$

kolme tunni pärast

$$T(3) = 32.$$

Betooni temperatuuri keskmine muutumise kiirus ajavahemikul $[0, 3]$ on

$$\frac{T(3) - T(0)}{3 - 0} = \frac{32 - 18}{3} = \frac{14}{3} \approx 4{,}67^\circ\text{C/h}.$$

Kuna funktsioon $T(t)$ on antud tingimuste põhjal pidev lõigus $[0,3]$ ja diferentseeruv vahemikus $(0,3)$, saame väita, et leidub arv $c \in (0,3)$ nii, et

$$T'(c) = \frac{T(3) - T(0)}{3 - 0} = \frac{14}{3} \approx 4{,}67^\circ\text{C/h}.$$

Seega mingil hetkel $t = c$ esimese kolme tunni jooksul oli betooni temperatuuri muutumise kiirus

$$T'(c) \approx 4{,}67^\circ\text{C/h},$$

mis on *oluliselt suurem* kui juhendis lubatud 2°C/h.

Järelikult on juhendmaterjali nõuet nende mõõtmiste põhjal rikutud: mingil ajal esimese kolme tunni jooksul muutus betooni temperatuur liiga kiiresti.

Ül 1.27. Töötajate arv ettevõtte tehases ajahetkel t on kirjeldatav funktsiooniga

$$g(t) = 10\ln(t+1) + 2,$$

kus t on aeg tundides alates kella 8:00 (ühik: inimest).

a) Mitu töötajat on tehases kell 10:00?

b) Leidke töötajate arvu muutumise kiirus kell 10:00.

c) Prognoosige diferentsiaali abil töötajate arvu kell 11:30 (alghetkeks lugeda 10:00).

d) Leidke töötajate keskmine arv ajavahemikus kell 8:00 kuni 12:00.

Lahendus. Kell 8:00 on $t = 0$, kell 10:00 on $t = 2$, kell 11:30 on $t = 3{,}5$, kell 12:00 on $t = 4$.

a) Töötajate arv kell 10.00

$$g(2) = 10\ln 3 + 2 \approx 12{,}99.$$

13 töötajat.

b) Muutumise kiirus kell 10.00

$$g'(t) = \frac{10}{t+1}, \qquad g'(2) = \frac{10}{3} \approx 3{,}33.$$

Töötajate arv kasvab kiirusega umbes 3,3 inimest/tunnis.

c) Prognoos diferentsiaali abil kell 11.30

$$\Delta t = 3{,}5 - 2 = 1{,}5, \qquad \Delta g \approx g'(2)\Delta t = \frac{10}{3} \cdot 1{,}5 = 5.$$

$$g(3{,}5) \approx 12{,}99 + 5 = 17{,}99.$$

Umbes 18 töötajat.

d) Töötajate keskmine arv ajavahemikus 8.00–12.00
Funktsiooni $g(t)$ keskmine väärtus lõigul $[0, 4]$:

$$g_{\text{kesk}} = \frac{1}{4-0} \int_0^4 g(t)\,dt = \frac{1}{4} \int_0^4 (10\ln(t+1) + 2)\ dt.$$

Lahendame:

$$\int 10\ln(t+1)\,dt = 10\left[(t+1)\ln(t+1) - (t+1)\right],$$

$$\int 2\,dt = 2t.$$

Seega

$$\int_0^4 g(t)\,dt = 10\left[(t+1)\ln(t+1) - (t+1)\right]_0^4 + 2t\Big|_0^4.$$

Arvutame:

$$10\left[(5)\ln 5 - 5 - (1 \cdot \ln 1 - 1)\right] + 8.$$

Kuna $\ln 1 = 0$, saame

$$10\left[5\ln 5 - 5 + 1\right] + 8 = 10\left[5\ln 5 - 4\right] + 8.$$

Ligikaudne väärtus:

$$5\ln 5 \approx 8{,}0472, \qquad 10(8{,}0472 - 4) + 8 \approx 48{,}47.$$

Keskmine:

$$g_{\text{kesk}} = \frac{48{,}47}{4} \approx 12{,}12.$$

Ajavahemiku keskmine töötajate arv on umbes 12.

1.3. Ekstreemumite leidmine

Ül 1.28. Olgu antud n reaalarvu $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Leidke neile *lähim* reaalarv z selliselt, et funktsioonil

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2 \qquad (1.3)$$

oleks vähim väärtus punktis z.

Lahendus. Funktsioon (1.3) on diferentseeruv, seetõttu leiame esmalt tema statsionaarse punkti. Arvutame tuletise

$$f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \ldots + 2(x - a_n)$$

ja leiame tuletise nullkoha $f'(z) = 0$

$$z = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Näitamaks, et selles punktis on funktsioonil lokaalne miinimum, arvutame $f''(z)$

$$f''(x) = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n > 0.$$

Järelikult funktsioon on nõgus kogu oma määramispiirkonnas $\mathbb{R}$, seega on tal punktis z miinimum.

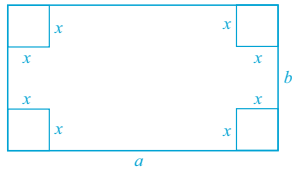
Vastus: Otsitav reaalarv on $z = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Ül 1.29. Ristküliku kujulise plaadi, mille küljed on a ja b, nurkadest lõigatakse välja neli võrdse pindalaga ruutu. Tekkinud risti kujulisest pinnalaotusest moodustatakse kast, mille kõrgus võrdub ruudu küljega. Leidke välja lõigatava ruudu külje pikkus, mille korral saame suurima ruumalaga kasti.

Lahendus. Teeme kasti pinnalaotusele vastava joonise
Kasti ruumala

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = abx - 2ax^2 - 2bx^2 + 4x^3$$
$$V'(x) = ab - 4ax - 4bx + 12x^2$$

$$V'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right), \quad x_2 = \frac{1}{6}\left(a + b + \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right)$$



$$V''(x) = -4a - 4b + 24x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V''(x_1) = -4\sqrt{a^2 - ab + b^2} < 0 \\ V''(x_2) = \ \ 4\sqrt{a^2 - ab + b^2} > 0 \end{cases}$$

Vastus: Välja lõigatava ruudu külje pikkus peab olema $x_1 = \frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right)$.

Ül 1.30. On vaja ehitada pöördsilindi kujuline pealt lahtine tünn, mille ruumala on V. Kuidas tuleb valida tünni mõõtmed, et materjali kulu oleks minimaalne.

Lahendus. Olgu silindri raadius r ja kõrgus h. Siis silindri ruumala

$$V = \pi\, r^2\, h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{V}{\pi\, r^2}.$$

Materjali kuluna tuleb arvestada silindi külgpindala ja ühe põhja pindala

$$S = 2\pi\, r\, h + \pi\, r^2 = \frac{2V}{r} + \pi\, r^2,$$

Leiame funktsiooni $S = S(r)$ tuletise nullkoha

$$S'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 2\pi\, r = 0 \quad \Rightarrow \quad -V + \pi\, r^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi}\, r^{-2} = \frac{V}{\pi}\left(\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \frac{V}{\pi}\left(\frac{V}{\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

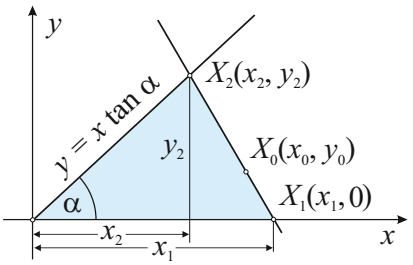
Vastus: Tünni mõõtmed peavad olema $r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Ül 1.31. Tuleb projekteerida kolmnurkne aed, mille kaks haara moodustavad nurga α. Selle nurga vastasküljel olevale aia osale peab jääma seal kasvav puu. Kuidas tuleb valida aia kolmas külg, et aiaga piiratud pindala oleks minimaalne?

Lahendus. Valime koordinaatide süsteemi nii, et koordinaatide alguspunktiks on nurga α juures olev tipp ja $x-$teljeks on üks nurga haar. Nurga teiseseks haaraks on sirge

$$y = x\,\tan\alpha.$$

Olgu aia kolmandale osale jääva puu koordinaadid $X_0(x_0,\,y_0)$ ja selle lõikepunktid



nurga teiste haaradega

$$X_1(x_1,\,0) \quad \text{ning} \quad X_2(x_2,\,x_2\tan\alpha).$$

Tekkinud kolmnurga pindala on

$$S = \frac{\tan\alpha}{2}x_1\,x_2.$$

Punkt X_0 on kolmandal haaral ja selle võrrand on

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Nüüd tuleb leida selle sirge tõus k selliselt, et tekkinud kolmnurga pindala oleks minimaalne.
Asjaolust, et punktid X_1 ja X_2 asuvad kolmandal haaral, leiame

$$\begin{array}{lcll} X_1(x_1,\,0) & \Rightarrow & -y_0 = k(x_1 - x_0) & \Rightarrow \quad x_1 = \frac{kx_0 - y_0}{k} \\ X_2(x_2,\,x_2\tan\alpha) & \Rightarrow & x_2\tan\alpha - y_0 = k(x_2 - x_0) & \Rightarrow \quad x_2 = \frac{kx_0 - y_0}{k - \tan\alpha} \end{array}$$

Nüüd saame leida sirge tõusule k vastava kolmnurga pindala

$$S(k) = \frac{\tan\alpha}{2}\cdot\frac{kx_0 - y_0}{k}\cdot\frac{kx_0 - y_0}{k - \tan\alpha} = \frac{\tan\alpha}{2}\,\frac{(kx_0 - y_0)^2}{k(k - \tan\alpha)}.$$

Leiame tuletise

$$S'(k) = -\frac{\tan\alpha\,(kx_0 - y_0)\,(kx_0\tan\alpha - 2ky_0 + y_0\tan\alpha)}{2k^2(k - \tan\alpha)^2},$$

mille nullkohad on

$$k_1 = \frac{y_0}{x_0} \qquad \text{ja} \qquad k_2 = \frac{y_0\tan\alpha}{2y_0 - x_0\tan\alpha}.$$

Siin osutub sobivaks ainult parameetri väärtus $k = k_2$ ja selle väärtuse korral on pindala $S = S(k)$ minimaalne, sest

$$S''(k_2) = -\frac{(x_0 - 2y_0 \cot\alpha)^4}{y_0\,(y_0 \cot\alpha - x_0)} > 0,$$

kuna $y_0 \cot\alpha - x_0 < 0$.
Leiame kolmanda külje otspunktid X_1 ja X_2 parameetri väärtuse $k = k_2$ korral

$$\begin{array}{lcllcl} X_1(x_1,\ 0) & \Rightarrow & X_1\Big(\frac{kx_0-y_0}{k},\ 0\Big) & \Rightarrow & X_1\Big(\frac{2(x_0\tan\alpha-y_0)}{\tan\alpha},\ 0\Big) \\ X_2(x_2,\ x_2\tan\alpha) & \Rightarrow & X_2\Big(\frac{kx_0-y_0}{k-\tan\alpha},\ \frac{kx_0-y_0}{k-\tan\alpha}\tan\alpha\Big) & \Rightarrow & X_2\Big(\frac{2y_0}{\tan\alpha},\ 2y_0\Big) \end{array}$$

Külje X_1X_2 keskpunkt K on punktis X_0, sest

$$\frac{1}{2}\Big(X_1 + X_2\Big) = (x_0,\ y_0).$$

Vastus: Projekteeritava aia kolmas külg tuleb konstrueerida nii, et seal kasvava puu asukoht poolitab seda külge.

Ül 1.32. Kuidas tuleb valida tala (vt Ül 1.2) mõõtmed, et tala kandejõud oleks maksimaalne?

Lahendus. Tala kandejõud F on kirjeldatud pideva funktsiooniga

$$F(a) = \kappa \cdot a \cdot (d^2 - a^2).$$

tala ristlõike laiusest a. Lõigul pidevate funktsioonide omadustest järeldub, et tala kandejõud F saavutab lõigul $[0,\ d]$ maksimaalse väärtuse (vt. *teoreemi ekstremaalsetest väärtustest*). Suurima väärtuse leidmiseks tuleb kõigepealt leida funktsiooni F statsionaarsed punktid (ehk tuletise nullkohad) vahemikust $(0,\ d)$. Funktsiooni F tuletis on

$$F'(a) = \Big(\kappa \cdot a \cdot (d^2 - a^2)\Big)' = \kappa \cdot (d^2 - 3a^2).$$

Millest saame, nullkohad $a = -\frac{d}{\sqrt{3}}$ ja $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Negatiivne nullkoht ei asu vahemikus $(0, d)$, seepärast vaatame ainult positiivset nullkohta. Arvutame tala kandejõu selles punktis

$$F\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = \kappa \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \left(d^2 - \frac{d^2}{3}\right) = \frac{\kappa \cdot 2d^3}{3\sqrt{3}}.$$

Kuna lõigu otspunktides on väärtused

$$F(0) = \kappa \cdot 0 \cdot (d^2 - 0^2) = 0 \quad \text{ja} \quad F(d) = \kappa \cdot d \cdot (d^2 - d^2) = 0,$$

siis funktsioon F saavutab suurima väärtuse punktis $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Arvutame tala ristlõike kõrguse h

$$h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Vastus: Tala laiuse a korral tuleb valida tala kõrguseks $h = \sqrt{2}\,a$.

Ül 1.33. Leidke ülesandes **(Ül 1.1)** toodud redeli lühim pikkus.

Lahendus. Redeli lühima pikkuse leidmiseks leiame funktsiooni $L(\theta)$ statsionaarse punkti(d). Esmalt avaldame tuletise

$$L'(\theta) = \frac{2\sin\theta}{(\cos\theta)^2} - \frac{\cos\theta}{(\sin\theta)^2} = \frac{2(\sin\theta)^3 - (\cos\theta)^3}{(\cos\theta)^2(\sin\theta)^2}.$$

Statsionaarne punkt on

$$2(\sin\theta)^3 - (\cos\theta)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\theta = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Redeli lühim pikkus on seega

$$L_{min} = L(\arctan(2^{-\frac{1}{3}})) = \sqrt{1 + 2^{-\frac{2}{3}}} \cdot (2 + \sqrt[3]{2}) \approx 4{,}16\ m.$$

Vastus: Redeli lühim pikkus on $L_{min} \approx 4{,}16\ m$.

Ül 1.34. (Tamm.[a]) 1953 aasta 31.01-01.02 tormi tagajärjel ujutati üle osa Hollandist, Belgia loodeosast, Inglismaast ja Šotimaast. Pärast seda üleujutust alustas Hollandi valitsus projektiga, et määrata tammi optimaalne kõrgus. Hollandi matemaatik David van Dantzig[b] pakkus välja, et tammi optimaalne kõrgus[c] on järgmise funktsiooni miinimumkohal (siin x on kõrgus, mille võrra olemasolevat tammi tuleb kõrgemaks ehitada)

$$f(x) = I_0 + kx + p_0 V \left(1 + \frac{100}{\delta}\right) e^{-\alpha x}, \qquad x \geqslant 0,$$

kus
$I_0 + kx$ – on tammi kõrgemaks ehitamise kulu,
p_0 – tõenäosus, et toimub uus üleujutus, kui tammi ei ehitata kõrgemaks,
V – üleujutuse poolt tekitatav hinnanguline kahju,
δ – intressimäär.
Arvutage tammi juurdeehituse optimaalne kõrgus. Kuidas muutub tammi juurdeehituse optimaalne kõrgus, kui ühte parameetritest p_0, V, δ suurendada.

[a] K. Sydsæter, P. Hammond ja A. Strøm, *Essential Mathematics for Economics Analysis*, 2012.

[b] 23. september 1900 – 22. juuli 1959

[c] D. van Dantzig, "Economic decision problems for flood prevention", *Econometrica*, **24**, 1956, lk. 276 – 287.

Lahendus. Tegemist on diferentseeruva funktsiooniga, seetõttu saame miinimumkoha leida funktsiooni tuletise nullkoha kaudu. Leiame funktsiooni f tuletise

$$f'(x) = k - \alpha p_0 V \left(1 + \frac{100}{\delta}\right) e^{-\alpha x}.$$

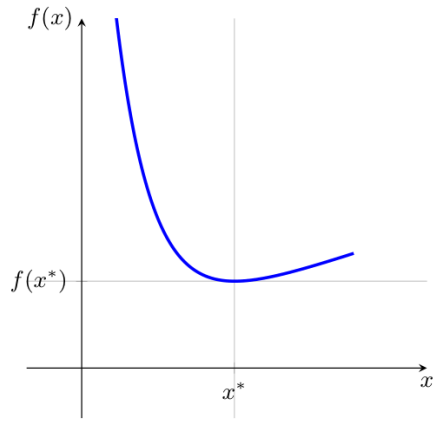
Avaldame tuletise nullkoha x^*

$$x^* = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha p_0 V}{k} \left(1 + \frac{100}{\delta}\right)\right).$$

Kuna

$$f''(x) = \alpha^2 p_0 V \left(1 + \frac{100}{\delta}\right) e^{-\alpha x} > 0,$$

siis on tõepoolest tegemist funktsiooni f miinimumiga.



Ülesande teise osa lahendamiseks teisendame x^* avaldist

$$x^* = \frac{1}{\alpha} \left(\ln \alpha + \ln p_0 + \ln V + \ln \left(1 + \frac{100}{\delta}\right) - \ln k \right).$$

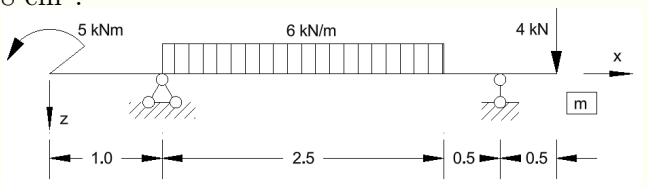
Vastus: Arvestades logaritmfunktsiooni monotoonse kasvamise omadust saame:

- parameetrite p_0 ja V suurenedes tammi juurdeehituse optimaalne kõrgus suureneb,
- intressimäära δ kasvades tammi juurdeehituse optimaalne kõrgus väheneb.

Ül 1.35. Leia tala maksimaalne siire tugede vahel. Tala z-telje suunalist siiret w kirjeldab funktsioon

$$w(x) = \frac{10^3}{E \cdot I}\Big[2.12 - 4.62x + 2.5x^2 - \frac{9.75(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{4}\Big],$$

kus tala elastsusmoodul $E = 210$ GPa ja ristlõike inertsimoment $I = 317.8$ cm^4.



Lahendus. Peame lahendama ekstreemumülesande. Selleks leiame siirdefunktsiooni tuletise nullkohad. Kuna tuletise võtmisel saame uueks funktsiooniks polünoomi, mille maksimaalne aste on 3, siis nullkohtade leidmine analüütiliselt osutub keerukaks. Selleks kasutame Newtoni meetodit, mis võimaldab nullkoha leidmist ligikaudselt alustades alglähendist. Funktsiooni $f(x)$ nullkoha leiame iteratiivselt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

kus $n = 1, 2, ..$ on iteratsiooni samm, x_n on alglähend, x_{n+1} on nullkoha väärtus järgmisel sammul, $f(x_n)$ on siirdefunktsiooni algväärtus ja $f'(x_n)$ on siirdefunktsiooni tuletis koordinaadi x järgi.

Oletame, et suurim siire tekib tugede vahel keskel ja seega võtame alglähendiks $x_1 = 2.5$ m. Nullkoha leidmiseks kasutame funktsiooni, mis on siirdefunktsiooni tuletis

$$f(x) = -4.62 + 5x - \frac{9.75(x-1)^2}{2} + (x-1)^3$$

ja selle tuletis

$$f'(x) = 5 - 9.75(x-1) + 3(x-1)^2.$$

Leiame suurused $f(x_1)$, $f'(x_1)$ ja x_2

$$f(2.5) = -4.62 + 5 \cdot 2.5 - \frac{9.75(2.5-1)^2}{2} + (2.5-1)^3 = 0.286$$

$$f'(2.5) = 5 - 9.75(2.5-1) + 3(2.5-1)^2 = -2.88$$

$$x_2 = 2.5 - \frac{0.286}{-2.88} = 2.60.$$

Järgmiseks võtame $x_2 = 2.6$ ja leiame $f(x_2)$, $f'(x_2)$ ja x_3

$$f(2.6) = -4.62 + 5 \cdot 2.6 - \frac{9.75(2.6-1)^2}{2} + (2.6-1)^3 = -0.0027$$

$$f'(2.6) = 5 - 9.75(2.6-1) + 3(2.6-1)^2 = -2.92$$

$$x_3 = 2.6 - \frac{-0.0027}{-2.91} = 2.60.$$

Näeme, et edasine arvutamine ei ole vajalik, kuna lahend on koondunud ja nullkohaks on $x = 2.6$ m. Leiame tala suurima siirde

$$w(2.6) = \frac{10^3}{210^9 \cdot 317.8^{-8}}\left[2.12 - 4.62\cdot 2.6 + 2.5\cdot 2.6^2 - \frac{9.75(2.6-1)^3}{6} + \frac{(2.6-1)^4}{4}\right] = 0.003m.$$

Vastus: Tala maksimaalne siire on $w(2.6) = 0.003\,m$.

1.4. Määramata integraal

Ül 1.36. Leida määramata inetegraal

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx.$$

Seda integraali kasutatakse kooniliste otstega mahuti ruumala arvutamisel.

Lahendus. Integreerimiseks teeme muutujate vahetuse ja kastutame hüperboolsete funktsioonide vahelisi seoseid

$$x = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad dx = a\,\mathrm{ch}\,t \qquad \text{ning} \qquad \mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1, \quad \mathrm{ch}^2 t = 1 - \mathrm{sh}^2 t.$$

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2}dx = \int \sqrt{a^2 + a^2\,\mathrm{sh}^2\,t}\,a\,\mathrm{ch}\,t\,dt = a^2 \int \mathrm{ch}^2\,t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int \left(\mathrm{e}^{\,t} + \mathrm{e}^{\,-t}\right)^2 dt = \frac{a^2}{4}\int \left(\mathrm{e}^{\,2t} + 2 + \mathrm{e}^{\,-2t}\right)dt =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(2t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\,2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\,-2t}\right) = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{8}\left(\mathrm{e}^{\,2t} - \mathrm{e}^{\,-2t}\right) = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{8}\left(\mathrm{e}^{\,t} + \mathrm{e}^{\,-t}\right)\left(\mathrm{e}^{\,t} - \mathrm{e}^{\,-t}\right).$$

Avaldame muutuja t

$$\frac{x}{a} = \mathrm{sh}\,t \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\,t} - \mathrm{e}^{\,-t}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\,2t} - 2\frac{x}{a}\mathrm{e}^{\,t} - 1 = 0$$

$$\mathrm{e}^{\,t} = \frac{x}{x} \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\,t} = \frac{1}{a}\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \ln\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$$

$$\mathrm{e}^{\,t}+\mathrm{e}^{\,-t}=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{a}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=$$
$$=\frac{\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\,\right)^2+a^2}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2})}=\frac{x^2+2x\sqrt{a^2+x^2}+a^2+x^2+a^2}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2})}=$$
$$=\frac{2\left(a^2+x^2+x\sqrt{a^2+x^2}\right)}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2})}=\frac{2\sqrt{a^2+x^2}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\,\right)}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2}\,)}=\frac{2}{a}\sqrt{a^2+x^2}$$

$$\mathrm{e}^{\,t}-\mathrm{e}^{\,-t}=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}-\frac{a}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=$$
$$=\frac{\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\,\right)^2-a^2}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2})}=\frac{x^2+2x\sqrt{a^2+x^2}+a^2+x^2-a^2}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2})}=$$
$$=\frac{2\left(x^2+x\sqrt{a^2+x^2}\,\right)}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2})}=\frac{2x\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\,\right)}{a\,(x+\sqrt{a^2+x^2})}=\frac{2x}{a}$$

Teostame leitud integraalis vajalikud asendused

$$I=\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{8}\left(\mathrm{e}^{\,t}+\mathrm{e}^{\,-t}\right)\left(\mathrm{e}^{\,t}-\mathrm{e}^{\,-t}\right)=$$
$$=\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{a^2}{8}\cdot\frac{2}{a}\sqrt{a^2+x^2}\cdot\frac{2x}{a}=$$
$$=\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}$$

Vastus: Otsitav integraal on

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+C,$$

kus logaritmfunktsiooni nimetajas olev konstant a on arvestatud integreerimiskonstandi C koosseisu.

Ül 1.37. Leida määramata inetegraal

$$\int\frac{1}{a-b\sin^2 x}dx\qquad(a>b).$$

Seda integraali kasutatakse sfääriliste otstega mahuti ruumala arvutamisel.

Lahendus. Integreerimiseks teeme trigonomeetrilise muutujate vahetuse ja kastutame nende funktsioonide vahelisi seoseid

$$u=\tan x,\quad du=\frac{1}{\cos^2 x}dx,\qquad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \quad \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

$$\int \frac{1}{a - b\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{a - b\frac{u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{u^2+1}{a(u^2+1) - bu^2} \cdot \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{du}{a + (a-b)u^2}$$

Teisendame integreeritavat avaldist ja kasutame integraali leidmiseks diferentsiaali märgi alla viimise võtet

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{a + (a-b)u^2} &= \frac{1}{a}\int \frac{du}{1 + \frac{a-b}{a}u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1 + \left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\,u\right)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}}\int \frac{du}{1 + \left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\,u\right)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}}\int \frac{\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\,u\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\,u\right)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\,u\right)
\end{aligned}$$

Minnes tagasi esialgsele muutujale x, saamegi otsitava inetegraali.

Vastus:

$$\int \frac{1}{a - b\sin^2 x}dx = \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\,\tan x\right) + C.$$

Ül 1.38. Arvutada määramata integraal

$$I = \int \arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}dx, \quad \text{kus} \quad a < b.$$

Integraali kasutatakse sfääriliste otstega mahuti ruumala arvutamisel.

Lahendus.

$$I = \int \arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} & dv = dx \\ du = \frac{-\sqrt{b^2-a^2}\,x}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)}dx & v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} + \sqrt{b^2-a^2}\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)}dx =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} - \sqrt{b^2-a^2}\int\frac{b^2-x^2-b^2}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)}dx =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} - \sqrt{b^2-a^2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - b^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)}\right).$$

Leiame sulgavaldises olevad integraalid. Esimese integraali arvutamiseks kasutame diferentsiaali märgi alla viimise võtet

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (1.4)$$

Teise integraali leidmiseks teeme muutujate vahetuse $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)} = \int\frac{a\cos t\,dt}{a\cos t(b^2-a^2\sin^2 t)} = \int\frac{dt}{b^2-a^2\sin^2 t}$$

Nüüd kasutame inetegraali (vt **Ül 1.37**)

$$\int\frac{dt}{p-q\,\sin^2 t} = \frac{1}{\sqrt{p(p-q)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{p-q}{p}}\tan t\right) + C,$$

milles võtame $p = b^2$ ja $q = a^2$. Seega

$$\int\frac{dt}{b^2-a^2\sin^2 t} = \frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\tan t\right),$$

milles nüüd on vaja teostada üleminek esialgsele muutujale x.

Muutujate vahetusest $x = a\sin t$ leiame, et

$$\sin t = \frac{x}{a} \quad \text{ja} \quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \quad \Rightarrow \quad \tan t = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Järelikult teise integraali lõplik kuju on

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)} = \frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right).$$

Teostame otsitavasse inetgraali vajalikud asendused

$$I = \int\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}dx = x\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} -$$
$$- \sqrt{b^2-a^2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - b^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)}\right) =$$

$$= x \arcsin \sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} -$$
$$- \sqrt{b^2-a^2}\left(\arcsin \frac{x}{a} - b^2 \frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \right) \right) =$$
$$= x \arcsin \sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} - \sqrt{b^2-a^2} \arcsin \frac{x}{a} + b \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \right)$$

Vastus: Otsitav integraal on

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}}\,dx = x \arcsin \sqrt{\frac{a^2-x^2}{b^2-x^2}} - \sqrt{b^2-a^2} \arcsin \frac{x}{a} +$$
$$+ b \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \right) + C.$$

Ül 1.39. Arvutada määramata integraal

$$I = \int \frac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}(b^2-x^2)}\,dx, \quad \text{kus} \quad a < b.$$

Integraali kasutatakse sfääriliste otstega mahuti ruumala arvutamisel.

Lahendus.

$$I = \int \frac{x^4}{\sqrt{a^2-x^2}(b^2-x^2)}\,dx = -\int \frac{b^4-x^4-b^4}{\sqrt{a^2-x^2}(b^2-x^2)}\,dx =$$

$$= -\int \frac{(b^2-x^2)(b^2+x^2)-b^4}{\sqrt{a^2-x^2}(b^2-x^2)}\,dx = -\int \frac{b^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + b^4 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}(b^2-x^2)} =$$

$$= -b^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + \int \frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + b^4 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}(b^2-x^2)} =$$

$$= \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx - (a^2+b^2) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + b^4 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}(b^2-x^2)}$$

Esimese integraali

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

leidmiseks saab kasutada muutujate vahetust $x = a \sin t$ (vt teha lahendus).

Teise integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

leidmisks sobib muutujate vahetus $x = a\,t$ või diferentsiaali märgi alla viimise võte (vt **(1.4)**).
Kolmas integraal on (vt **Ül 1.38** lahendust)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\,(b^2-x^2)} = \frac{1}{b\sqrt{b^2-a^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) + C.$$

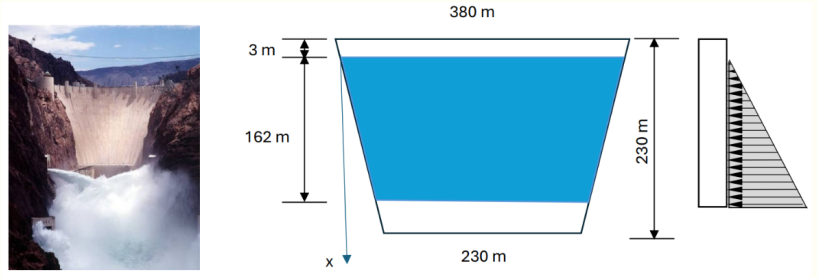
Kolme leitud integraali põhjal saamegi otsitava integraali.

Vastus:

$$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} - (a^2+b^2)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b^3}{\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) + C.$$

1.5. Määratud integraal ja selle rakendused

Ül 1.40. Hooveri pais (USA, 1936) on betoonist suurehitis, mis hoiab veemassi tänu oma kaalule. Joonisel on esitatud paisu lihtsustatud skeem. Arvutage paisule mõjuva vee summarne jõud.



Lahendus. Seome paisuga allapoole suunatud x-telje,mille algus asub veepinna tasemell. Vee avaldab mõju paisule hüdrostaatiline rõhuna, mis kasvab lineaarselt sügavusega, so

$$p(x) = \rho\, g\, x,$$

kus $\rho = 1000\,kg/m^3$ on vee tihedus ja vabalangemise kiirendus on $g = 9,81\,m/s^2$.

Trapetsikujulise paisu laius b kahaneb koordinaadi x-i kasvades:

$$b(x) = 380 + \frac{230-380}{230}x = 380 - 0,652\,x.$$

Jõu leidmiseks tuleb arvutada määratud integraal:

$$F = \int_3^{165} \rho\, g\, x(380 - 0,652\, x)dx = \int_3^{165} 1000 \cdot 9,81x(380 - 0,652\, x)dx =$$

$$= \int_3^{165} (3727800x - 6131,25x^2)dx = (1863900x^2 - 2043,45x^3)\Big|_3^{163} =$$

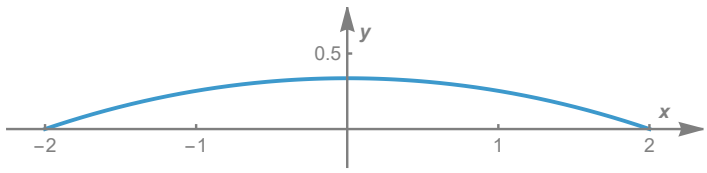
$$= 41,548 \cdot 10^9\ \mathrm{N} \approx 41,5\ \mathrm{GN}.$$

Vastus: Paisule mõjuv summaarne jõud on $41,5$ GN.

Ül 1.41. Ristkülikukujulise põhjaga hoonele, mille mõõdud on 4×10 m, ehitatakse plekist katus. Arvutage katuse ehitamiseks vajalik pleki kogus, kui katuse ristlõige on:

1. aheljoon $y(x) = 6\cosh(1/3) - 6\cosh\left(\frac{x}{6}\right)$;
2. tsükloid parameetriliste võrranditega $x(t) = \frac{2}{\pi}(t + \sin(t))$, $y(t) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos(t))$, kus $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$;
3. *brahhistokroon* parameetriliste võrranditega $x(t) = \frac{2}{\pi}(t - \sin(t))$, $y(t) = \frac{2}{\pi}(1 - \cos(t))$, kus $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$;
4. ellipsi $x(t) = 2\cos(t)$, $y = b\sin(t)$ kaar, kus $0 \leqslant t \leqslant \pi$ ja $0 < b \leqslant 2$.

Lahendus. Katuse ehitamiseks vaja mineva pleki koguse saame kätte, kui arvutame pinnatüki ehk katuse pindala kasutades esimest liiki pindintegraali. Kuna katuse ristlõige on muutumatu, siis saame pindala leida nii, et arvutame ristlõike kaare pikkuse (ehk joone kaare pikkuse).



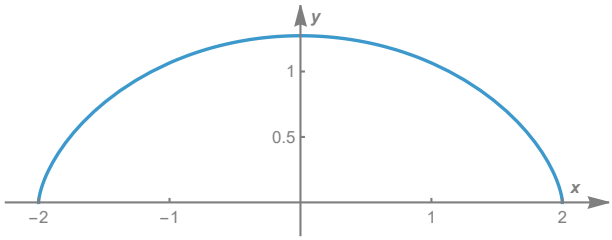
Aheljoon

1. Aheljoone korral kasutame kaare pikkuse leidmiseks valemit

$$s = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (\sinh(x/6))^2}dx = \int_{-2}^{2} \cosh(x/6)dx =$$

$$= 12 \int_{0}^{2} \cosh(x/6)d(x/6) = 12 \sinh(1/3) = 4{,}074\ldots.$$

Sellise katuse korral läheb vaja $4{,}074\ldots \cdot 10 \approx 40{,}74\, m^2$ plekki.

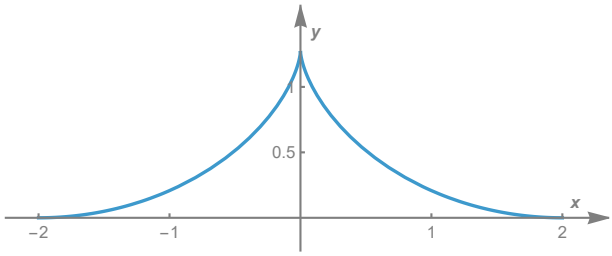


Tsükloid

2. Leiame katuse katmisek vaja mineva pleki koguse, kui katuse ristlõige on tsükloid. Selleks arvutame tsükloidi pikkuse

$$s = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + (\sin(t))^2}dt = 5{,}088\ldots.$$

Vaja läheb $5{,}088\ldots \cdot 10 = 50{,}9\, m^2$ plekki.



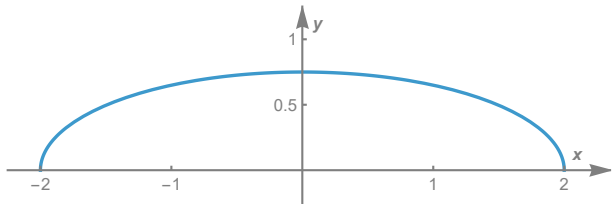
Brahhistokroon

3. Leiame katuse katmiseks vaja mineva pleki koguse, kui katuse ristlõige on

brahhistokroon. Arvutame brahhistokrooni pikkuse

$$s = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2}dt = 5{,}088\ldots.$$

Vaja läheb $5{,}088\ldots \cdot 10 = 50{,}9\,m^2$ plekki.



Ellipsi ülemine pool, $b = \frac{3}{4}$.

4. Kui katuse ristlõige on ellipsi ülemine pool, siis arvutame ristlõike pikkuse. Paneme tähele, et kui $b = 2$, siis on tegemist ringjoone kaare pikkusega. Sel juhul on ristlõike pikkus hõlpsalt leitav $s = \pi \cdot 2$ ning katuse ehitamiseks vajalik pleki kogus on $20\pi\,m^2 \approx 62{,}8\,m^2$. Kui tegemist ei ole ringjoonega, siis

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4(\sin(t))^2 + b^2(\cos(t))^2}dt = \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{4 - (4-b^2)(\cos(t))^2}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - (4-b^2)(\sin(t))^2}dt = \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1 - \frac{4-b^2}{4}(\sin(t))^2}dt = 4E\left(\sqrt{\frac{4-b^2}{4}}\right), \end{aligned}$$

kus $E(\cdot)$ on teist liiki täielik elliptiline integraal. Suurust $\sqrt{\frac{4-b^2}{4}}$ nimetatakse ellipsi *ekstsentrilisuseks*. Funktsioon $E(\cdot)$ ei ole elementaarfunktsioon, seepärast tuleb väärtuse arvutamisel kasutada matemaatika tarkvara. Fiksserides ellipsi pooltelje b, saame selle integraali arvutamiseks kasutada ligikaudseid meetodeid, näiteks Simpsoni valemit.

Vastus: Katusepleki kulu on: 1. $40{,}74\,m^2$; 2. $50{,}9\,m^2$; 3. $50{,}9\,m^2$; 4. Kui $b = \frac{3}{4}$, siis $90{,}9\,m^2$.

Ül 1.42. Osakese kiirendus muutub ajas vastavalt seosele $a = 6t+6$ (m/s^2). Leia osakese kiiruse ja asukoha funktsioon ajas. Osakene alustab liikumist kiirusega 2 m/s ajahetkel $t = 0$.

Lahendus. Kiirust võib kirjeldada kiirenduse integraalina

$$\int dv = \int a dt \Rightarrow \int_2^v dv = \int_0^t (6t+6)dt \Rightarrow v - 2 = \left(\frac{6t^2}{2} + 6t\right)\Big|_0^t \Rightarrow v = 3t^2 + 6t + 2.$$

Osakese asukoha funktsiooni saame kiiruse integraalist

$$\int dx = \int v dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t (3t^2 + 6t + 2)dt \Rightarrow x = t^3 + 3t^2 + 2t.$$

Vastus: Ajahetkel t on osakese kiirus $v(t) = 3t^2 + 6t + 2$ ja asukoht $x(t) = t^3 + 3t^2 + 2t$.

Ül 1.43. Seljandikku, mille ristlõike ülemine külg on parabool, kaevatakse süvend horisontaalse maantee jaoks. Süvend kulgeb ristlõike sihis, on pikkusega 300 m, maksimaalse sügavusega 18 m ja laiusega $2a$, kus a on tee laius. Süvendamisel saadud pinnast kasutatakse tee muldkeha ehitamisel väljaspool seljandikku. Trapetsikujulise ristlõikega muldkeha kõrgus on 3 m ja laius poolkõrgusel on $1.5a$. Kui pika muldkeha saab saadud pinnasekogusega ehitada?

Lahendus. Olgu x maantee sihis kulgev horisontaalkoordinaat, y kõrgus tee pinnast ja paiknegu koordinaatide alguspunkt parabooli haripunkti all. Süvend on kõvertrapetsi kujulise põhjaga silinder, mille põhja piiravad jooned

$$y = 18\left[1 - \left(\frac{x}{150}\right)^2\right] \quad \text{ja} \quad y = 0$$

ning kõrgus on $2a$. Süvendamisel saadud pinnase ruumala on seega järgmine (kõrgus korrutatud põhja pindalaga):

$$V = 2a \int_{-150}^{150} 18\left[1 - \left(\frac{x}{150}\right)^2\right] dx = \ldots = 7200a.$$

Ehitatava muldkeha ruumala on $V = 3 \cdot 1.5aL$, kus L on muldkeha pikkus. Seega saame võrrandi $4.5aL = 7200a$. Lahend on $L = 1600$ m.

Vastus: Ehitada saab muldkeha pikkusega $L = 1600$ m.

Ül 1.44. Vaia löömisel maasse sõltub vaiale mõjuv hõõrdejõud tema sügavusest (st maa sees oleva vaiaosa pikkusest). Arvutada haamri poolt tehtud töö vaia löömisel 1.5m sügavusele, kui hõõrdejõu valem njuutonites on $F = 1700s^{3/2}$, kus s on vaia sügavus meetrites.

Lahendus. Haamri poolt tehtud töö avaldub temale rakendatud jõu integraalina üle läbitud tee. Seega

$$A = \int_0^{1.5} F ds = \int_0^{1.5} 1700 s^{3/2} ds = 1700 \frac{2s^{5/2}}{5}\Big|_0^{1.5} \approx 1874\,\text{J}.$$

Vastus: Haamri poolt tehtud töö on 1874 J.

Ül 1.45. Vaatleme vahelduvvoolu tarbijat (nt elektrimootor). Olgu tarbijale rakendatud pinge $U(t) = E\sin(2\pi ft)$, kus E on amplituud ja f on sagedus. Kui tarbija takistus on R, siis avaldub tarbija võimsus järgmise valemiga:

$$P(t) = U(t)I(t) = \frac{U(t)^2}{R} = \frac{E^2}{R}\sin^2(2\pi ft).$$

Tarbija poolt tehtud töö saame, kui integreerime võimsust üle vaadeldava ajavahemiku. Seega on tarbija poolt ühe võnkeperioodi jooksul tehtud töö valem järgmine:

$$A = \frac{E^2}{R}\int_0^T \sin^2(2\pi ft)dt, \tag{1.5}$$

kus $T = \frac{1}{f}$ on perioodi pikkus.
Praktikas kasutatakse vahelduvvoolu tarbija töö arvutamiseks lihtsamat valemit, mis sisaldab võimsuse konstantset efektiivväärtust P_{ef}. Viimane avaldub kujul

$$P_{ef} = \frac{U_{ef}^2}{R},$$

kus $U_{ef} = \frac{E}{\sqrt{2}}$ on pinge efektiivväärtus. Ühe võnkeperioodi jooksul tehtud töö avaldub järgmiselt:

$$A = P_{ef}T = \frac{E^2}{2R}T. \tag{1.6}$$

Tõestada, et valemid (1.5) ja (1.6) annavad sama tulemuse.

Lahendus. Arvutame:

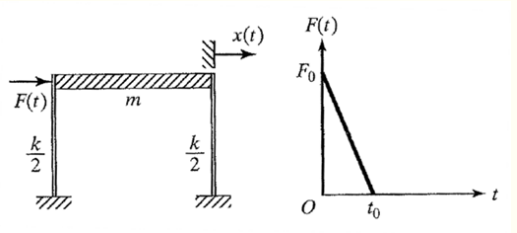
$$\begin{aligned} A &= \frac{E^2}{R}\int_0^T \sin^2(2\pi ft)dt = \frac{E^2}{R}\int_0^T \frac{1}{2}\Big(1-\cos(4\pi ft)\Big)dt = \\ &= \frac{E^2}{2R}\left(t - \frac{1}{4\pi f}\sin(4\pi ft)\right)\Big|_0^T = \frac{E^2}{2R}\left(T - \frac{1}{4\pi f}\sin(4\pi fT)\right) = \\ &= \frac{E^2}{2R}\left(T - \frac{1}{4\pi f}\sin(4\pi)\right) = \frac{E^2}{2R}T. \end{aligned}$$

Vastus: Valemid (1.5) ja (1.6) on samaväärsed.

Ül 1.46. Raamile mõjub löök, mis on kirjeldatav kolmnurkse impulssfunktsioonina. Kirjuta lahti võnkumislahend

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n (t-\tau) d\tau,$$

kus m on raami mass ja ω_n on raami omavõnkesagedus.



Lahendus. Löögijõud on

$$F(\tau) = \begin{cases} F_0(1 - \frac{\tau}{t_0}), 0 \le \tau \le t_0 \\ 0, \tau \le t_0 \end{cases}$$

Lahendi leiame kahe eraldi integreerimisega, löögiimpulssi ajavahemikus ja peale löögiimpulssi toimumist. Lahend ajavahemikus $0 \le \tau \le t_0$, teeme muutuja vahetuse $\tau \to \omega_n \tau$ ja kasutame seost $\sin \omega_n (t-\tau) = \sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} \int_0^t (1 - \frac{\tau}{t_0})(\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau) d(\omega_n \tau) =$$

$$\frac{F_0}{m\omega_n^2} \sin \omega_n t \int_0^t (1 - \frac{\tau}{t_0}) \cos \omega_n \tau d(\omega_n \tau) - \frac{F_0}{m\omega_n^2} \cos \omega_n t \int_0^t (1 - \frac{\tau}{t_0}) \sin \omega_n \tau d(\omega_n \tau)$$

Integreerime ositi

$$\int \tau \cos \omega_n \tau d(\omega_n \tau) = \tau \sin \omega_n \tau + \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n \tau$$

ja

$$\int \tau \sin \omega_n \tau d(\omega_n \tau) = -\tau \cos \omega_n \tau + \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n \tau,$$

saame

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [\sin \omega_n t (\sin \omega_n t - \frac{t}{t_0} \sin \omega_n t - \frac{1}{\omega_n t_0} \cos \omega_n t + \frac{1}{\omega_n t_0}) -$$

$$\cos \omega_n t (-\cos \omega_n t + 1 + \frac{t}{t_0} \cos \omega_n t - \frac{1}{\omega_n t_0} \sin \omega_n t)] =$$

$$\frac{F_0}{m\omega_n^2}(1-\frac{t}{t_0}-\cos\omega_n t+\frac{1}{\omega_n t_0}\sin\omega_n t)$$

Lahendi leidmiseks ajavahemikus $\tau \geq t_0$, kasutame sama lahendi integraali, aga ülemise integreerimisraja muudame t_0-ks, kuna löök sellest edasi ei kesta

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n^2}\int_0^{t_0}(1-\frac{\tau}{t_0})(\sin\omega_n t\cos\omega_n\tau-\cos\omega_n t\sin\omega_n\tau)d(\omega_n\tau)=$$

$$\frac{F_0}{m\omega_n^2}\sin\omega_n t\int_0^{t_0}(1-\frac{\tau}{t_0})\cos\omega_n\tau d(\omega_n\tau)-\frac{F_0}{m\omega_n^2}\cos\omega_n t\int_0^{t_0}(1-\frac{\tau}{t_0})\sin\omega_n\tau d(\omega_n\tau)=$$

$$\frac{F_0}{m\omega_n^2}[\sin\omega_n t(\sin\omega_n t_0-\sin\omega_n t_0-\frac{1}{\omega_n t_0}\cos\omega_n t_0+\frac{1}{\omega_n t_0})-$$

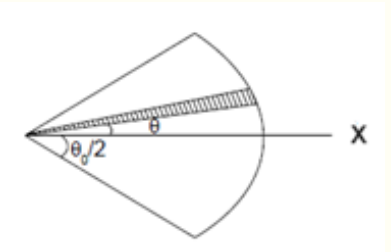
$$\cos\omega_n t(-\cos\omega_n t_0+1+\cos\omega_n t_0-\frac{1}{\omega_n t_0}\sin\omega_n t_0)]=$$

$$\frac{F_0}{m\omega_n^3 t_0}[(1-\cos\omega_n t_0)\sin\omega_n t-(\omega_n t_0-\sin\omega_n t_0)\cos\omega_n t]$$

Vastus: Otsitav võnkumislahend on

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_n^3 t_0}[(1-\cos\omega_n t_0)\sin\omega_n t-(\omega_n t_0-\sin\omega_n t_0)\cos\omega_n t].$$

Ül 1.47. Leida sektori pinnakeskme asukoht, kui sektori raadius on R ja nurk θ_0.



Lahendus. **Meetod 1.** Asetame x-telje alguspunkti sektori tippu ja sektori telje suhtes sümmeetriliselt. Viirutatud osa pinnaelemendi dA leiame järgmiselt

$$dA=\frac{1}{2}R^2 d\theta.$$

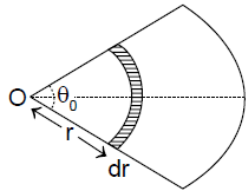
Sektori pinnakeskme leidmiseks jagame pinna staatilise momendi pindalaga:

$$x_c=\frac{\int x dA}{\int dA}=$$

$$\frac{\int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2}(\frac{2}{3}R\cos\theta)(\frac{1}{2}R^2d\theta)}{\int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2}\frac{1}{2}R^2d\theta},$$

kus $x=\frac{2}{3}R\cos\theta$ on pinnaelemendi dA pinnakeskme koordinaat. Seega

$$x_c=\frac{\frac{4}{3}\int_0^{\theta_0/2}\cos\theta d\theta}{2\int_0^{\theta_0/2}d\theta}=\frac{2}{3}\frac{R\sin\frac{\theta_0}{2}}{\frac{\theta_0}{2}}.$$



Meetod 2. Võtame integreeriselemendiks kaareelemendi laiusega dr. Pinnaelemendiks saame

$$dA=r\theta_0dr.$$

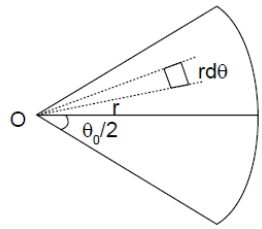
Sektori pinnakese leitakse jälle pinna staatilise momendi ja pindala suhtest:

$$x_c=\int\frac{xdA}{dA}=\int\frac{2r}{\theta_0}\sin\frac{\theta_0}{2}\theta_0rdr,$$

kus $x=\frac{2r}{\theta_0}\sin\frac{\theta_0}{2}$ on kaareelemendi pinnakeskme koordinaat. Seega

$$x_c=2\sin\frac{\theta_0}{2}\int_0^R r^2dr=2\sin\frac{\theta_0}{2}\frac{R^3}{3}.$$

Meetod 3. Käsitleme all joonisel üldisemat pinnaelementi $dA=d\theta rdr$.



Sektori pinnakese avaldub kujul

$$x_c=\frac{\int xdA}{\int dA}=\frac{\int\int(r\cos\theta)rdrd\theta}{A}$$

$$= \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\theta_0/2}^{\theta_0/2} \cos\theta d\theta}{\frac{1}{2}R^2\theta_0}$$

$$= \frac{\frac{R^3}{3} 2\sin\frac{\theta_0}{2}}{R^2 \sin\frac{\theta_0}{2}} = \frac{\frac{2}{3}R\,\sin\frac{\theta_0}{2}}{\frac{\theta_0}{2}}.$$

Vastus: Näeme, et kõik kolm meetodit annavad sama tulemuse.

Ül 1.48. Silindilise mahuti eemaldatav kaas on poolringi kujuline ja selle üles tõtstmiseks kasutatakse üht vertikaalset trossi. Selleks, et tõstmine oleks tasakaalus (st kaas ei kallutuks ega pöörduks), peab trossi kinnituspunkt paiknema täpselt masskeskme kohal. Leida kaane masskeskme koordinaadid, kui ringi raadius on r.

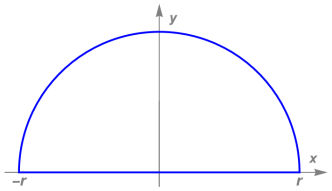
Lahendus. Kui tasapinnaline kujund on piiratud joontega $y = f(x)$ ja $y = g(x)$, kus $f(x) \geqslant g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Siis selle kujundi masskese asub punktis $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$, kus

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x\big(f(x) - g(x)\big)dx, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)dx,$$

kus S on kujundi pindala

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Valime koordinaatide alguspunktik ringi keskpunkti. Siis ülemine poolring piiratud joontega $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ja $g(x) = 0$ ning $x \in [-r, r]$.



Poolringi pindala on

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

Masskeskme koordinaatide leidimiseks tuleb arvutada kaks integraali. Esiteks

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 0,$$

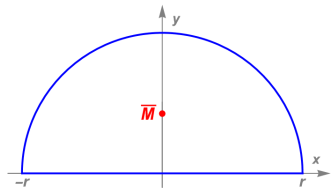
sest integreerimispiirkond on sümmeetriline ja integreeritav funktsioon on paaritu. Teiseks

$$\bar{y} = \frac{1}{2S}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \frac{1}{\pi r^2}\left(r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Seega kujundi masskeskme koordinaadid (vt ka ülesannet 1.74) on

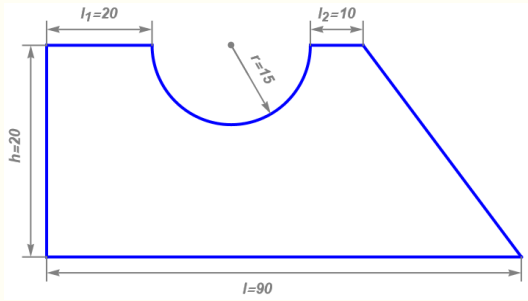
$$\overline{M}\left(0,\ \frac{4r}{3\pi}\right).$$

Joonisel oleva ringjoone raadius $r = 10$ ja sel juhul $\overline{M}(0, 4.24)$.



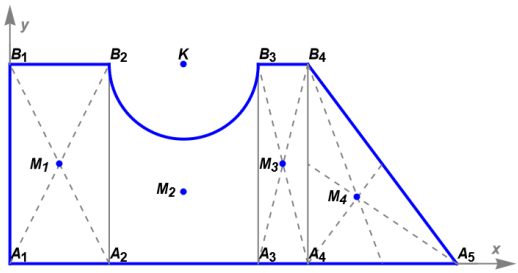
Vastus: Poolringi masskeskme koordinaadid on $\overline{M}\left(0,\ \frac{4r}{3\pi}\right)$.

Ül 1.49. Leida ühtlase tihedusega erikujulise seinapaneeli ristlõike masskeskme koordinaadid, kui selle kuju ja mõõtmed on antud joonisel.



Lahendus. **Meetod 1.** Seome selle paneeliga koordinaatide süsteemi selliselt, et koordinaatide alguspunkt on paneeli alumises vasakus nurgas. Jagame paneeli osadeks joonisel näidatud viisil. Arvestades paneeli mõõtmeid, saame leida tekkinud kujundite tippude koordinaadid.
Tippude ja ringjoone keskpunkti koordinaadid on:

$A_1(0,\ 0)$	$A_2(20,\ 0)$	$A_3(50,\ 0)$	$A_4(60,\ 0)$	$A_5(90,\ 0)$
$B_1(0,\ 40)$	$B_2(20,\ 40)$	$B_3(50,\ 40)$	$B_4(60,\ 40)$	$K(35,\ 40)$



Tekkinud ristkülikute ja kolmnurga masskeskmete M_1, M_3 ning M_4 koordinaadid on lihtsalt leitavad. Tähistame punktide kohavektorid vastavate väikeste tähtedega, seega

$$\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2) = \frac{1}{2}\big((0,\,0) + (20,\,40)\big) = (10,\,20) \quad \Rightarrow \quad M_1(10,\,20)$$

$$\mathbf{m}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_4) = \frac{1}{2}\big((50,\,0) + (60,\,40)\big) = (55,\,20) \quad \Rightarrow \quad M_3(55,\,20)$$

$$\mathbf{m}_4 = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{b}_4) = \frac{1}{2}\big((60,\,0) + (90,\,0) + (60,\,40)\big) = \Big(70,\,\frac{40}{3}\Big) \quad \Rightarrow \quad M_4\Big(70,\,\frac{40}{3}\Big)$$

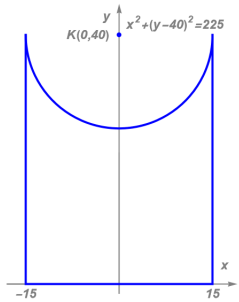
Nende kujundite pindalad on vastavalt

$$S_1 = 20 \cdot 40 = 1600, \quad S_2 = 30 \cdot 40 - \frac{1}{2}\pi \cdot 15^2 = \frac{75(32 - 3\pi)}{2} \approx 846.57,$$

$$S_3 = 10 \cdot 40 = 400, \quad S_4 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600.$$

Kujundi $A_2A_3B_3B_2$ masskeskme leidmiseks valime koordinaatide süsteemi nii, et ringjoone keskpunkt oleks $y-$teljel. Siis on selle ringjoone võrrand

$$x^2 + (y - 40)^2 = 225, \qquad \text{millest} \qquad y = f(x) = \left[\begin{array}{l} 40 - \sqrt{225 - x^2}, \\ 40 + \sqrt{225 - x^2}. \end{array}\right.$$



$$M_x = \int_{-15}^{15} x\left(40 - \sqrt{225 - x^2}\right)\,dx = 0,$$

sest integreerimise rajad on sümmeetrilised ja integreeritav funktsioon on paaritu.

$$M_y = \frac{1}{2}\int_{-15}^{15}\left(40-\sqrt{225-x^2}\right)^2\,dx = 750(35-6\pi) \approx 12112.83.$$

Seega otsitava kujundi masspunkti koordinaadid on

$$M_2\Big(\frac{M_x}{S_2},\,\frac{M_y}{S_2}\Big) \qquad \Rightarrow \qquad M_2\Big(0,\,\frac{20(35-6\pi)}{32-3\pi}\Big)$$

kus $S_2 = \frac{75}{2}(32-3\pi)$ on selle kujundi pindala. Teisendame leitud punkti esialgsesse koordinaatide süsteemi

$$M_2\Big(35,\,\frac{20(35-6\pi)}{32-3\pi}\Big) \qquad \text{ehk} \qquad M_2(35,\,14.31).$$

Kui me koordinaatide teisesndust ei kasutaks, tuleks leida mõnevõrra keerulisemad integraalid

$$M_x = \int_{20}^{50} x\left(40-\sqrt{-x^2+70x-1000}\right)\,dx = \frac{2625}{2}(32-3\pi),$$

$$M_y = \int_{20}^{50}\left(40-\sqrt{-x^2+70x-1000}\right)^2\,dx = 750(35-6\pi).$$

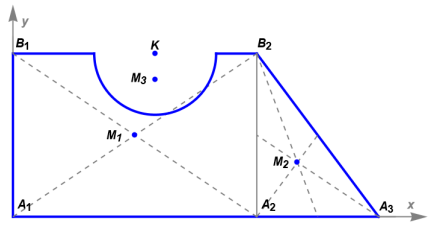
Paneeli masskeskme M kohavektor on

$$\mathbf{m} = \frac{S_1\mathbf{m_1}+S_2\mathbf{m_2}+S_3\mathbf{m_3}+S_4\mathbf{m_4}}{S_1+S_2+S_3+S_4},$$

millest saame, et masspunkti koordinaadid on

$$M\Big(\frac{5(608-21\pi)}{80-3\pi},\,\frac{4660-360\pi}{240-9\pi}\Big) \qquad \text{ehk} \qquad M(38.40,\,16.67).$$

Meetod 2. Seome selle paneeliga koordinaatide süsteemi selliselt, et koordinaatide alguspunkt on paneeli alumises vasakus nurgas. Jagame paneeli osadeks joonisel näidatud viisil. Arvestades paneeli mõõtmeid, saame leida tekkinud kujundite tippude koordinaadid.



Tippude ja ringjoone keskpunkti koordinaadid on:

$$\begin{array}{lll} A_1(0,\,0) & A_2(60,\,0) & A_3(90,\,0) \\ B_1(0,\,40) & B_2(60,\,40) & K(35,\,40) \end{array}$$

Tekkinud ristküliku ja kolmnurga masskeskmete M_1, ning M_2 koordinaadid on lihtsalt leitavad. Tähistame punktide kohavektorid vastavate väikeste tähtedega, seega

$$\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2) = \frac{1}{2}\big((0,\,0) + (60,\,40)\big) = (30,\,20) \quad \Rightarrow \quad M_1(30,\,20)$$

$$\mathbf{m}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{b}_2) = \frac{1}{2}\big((60,\,0) + (90,\,0) + (60,\,40)\big) = \Big(70,\,\frac{40}{3}\Big) \quad \Rightarrow \quad M_4\Big(70,\,\frac{40}{3}\Big)$$

Ristküliku ja kolmnurga pindalad on vastavalt

$$S_1 = 60 \cdot 40 = 2400, \qquad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 = 600.$$

Risküliku väljalõikeks oleva poolringi pindala on

$$S_3 = \frac{1}{2}\,\pi\,15^2 = \frac{225\pi}{2} \approx 353.2.$$

Ülesande **1.48** lahenduse põhjal leiame, et

$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{k} + \Big(0,\,-\frac{4\,r}{3\,\pi}\Big) = (35,\,40) + \Big(0,\,-\frac{4 \cdot 15}{3\,\pi}\Big) = \Big(35,\,40 - \frac{20}{\pi}\Big) \;\Rightarrow\; M_3\Big(35,\,40 - \frac{20}{\pi}\Big)$$

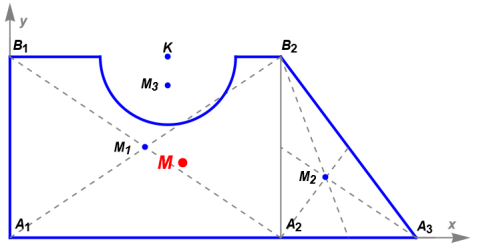
Paneeli masskeskme M kohavektor on

$$\vec{m} = \frac{S_1\vec{m}_1 + S_2\vec{m}_2 - S_3\vec{m}_3}{S_1 + S_2 - S_3},$$

milles väljalõike osa on arvestatud „negatiivse pindalana". Pärast vajalikke asendusi ja lihtsustamist saame, et masskeskme M koordinaadid on

$$M\Big(\frac{5(608 - 21\pi)}{80 - 3\pi}, \frac{4660 - 360\pi}{240 - 9\pi}\Big) \qquad \text{ehk} \qquad M(38.40,\,16.67).$$

Mõlema meetodiga leitud masspunktid langevad kokku ja jooniselt näeme, kus paneeli masspunkt M paikneb.



Vastus: Paneeli masskese on punktis $M(38.40,\,16.67)$.

Ül 1.50. Kraanaga tuleb tõsta betoonist paneel. Paneeli kuju saab kirjeldada järgnevate funktsioonidega

$$y = 0{,}5x^2, \qquad y = 0, \qquad x = 3,$$

kus x ja y on mõõdetud meetrites ning paneelil on konstantne paksus ja tihedus. Tõstekonks tuleb kinnitada paneelil sellises punktis, et see jääks tõstmisel tasakaalu. Leida kinnituse asukoha koordinaadid $(\bar{x}, \bar{y})$.

Lahendus. Kuna paneelil on konstantne paksus ja tihedus, siis langeb otsitav punkt kokku masskeskmega. Kui $(\bar{x}, \bar{y})$ on kujundi masskeskme koordinaadid ning kujund on piiratud ülevalt funktsiooniga $y = f(x)$, alt x-teljega ning sirgetega $x = a$ ja $x = b$, siis masskeskme koordinaadid on

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\, f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)\, dx},$$

kus $a = 0$, $b = 3$ ja $f(x) = 0{,}5x^2$.

Arvutame kõigepealt nimetaja:

$$\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^3 0{,}5x^2\, dx = 0{,}5 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 0{,}5 \cdot \frac{27}{3} = 4{,}5.$$

Arvutame koordinaadi $\bar{x}$ lugeja:

$$\int_0^3 x\, f(x)\, dx = \int_0^3 x \cdot 0{,}5x^2\, dx = 0{,}5 \int_0^3 x^3\, dx = 0{,}5 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = 0{,}5 \cdot \frac{81}{4} = 10{,}125.$$

$$\bar{x} = \frac{10{,}125}{4{,}5} = 2{,}25.$$

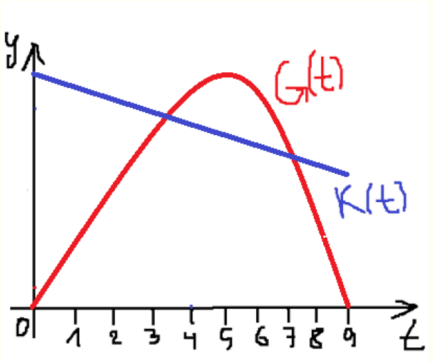
Arvutame koordinaadi $\bar{y}$ lugeja:

$$\frac{1}{2}\int_0^3 (f(x))^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (0{,}5x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^3 0{,}25x^4 dx = \frac{1}{8}\int_0^3 x^4 dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^3 = \frac{243}{40}.$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{243}{40}}{4{,}5} = \frac{243}{40} \cdot \frac{2}{9} = \frac{27}{20} = 1{,}35.$$

Vastus: Tõstekonksu kinnituse asukoha koordinaadid on $(\bar{x}, \bar{y}) = (2{,}25;\ 1{,}35)$.

Ül 1.51. Joonisel on kujutatud kahe pumba vee väljapumpamise kiiruse graafikud ehituskaevikust.



- Funktsiooni $K(t)$ graafik (sinine joon) kirjeldab pumba K väljapumpamise kiirust t tunni möödumisel alates töö alustamisest (liitrit tunnis).
- Funktsiooni $G(t)$ graafik (punane joon) kirjeldab pumba G väljapumpamise kiirust t tunni möödumisel alates töö alustamisest (liitrit tunnis).

Lahendus. Vasta järgmistele küsimustele, tuginedes ainult joonisele.

a) Millise pumba abil pumbati **esimese 1 tunni jooksul** rohkem vett?

Vastus: .....

b) Millise pumba abil pumbati **esimese 5 tunni jooksul** rohkem vett?

Vastus: .....

c) Kumb pump pumpab **kogu 9 tunni jooksul** rohkem vett välja? Põhjenda lühidalt, kuidas saad seda jooniselt järeldada.

Vastus: .....

Vastus: a) K, b) K, c) K.

Ül 1.52. Ehitusel mõõdetakse tasandatud pinnase vajumise kiirust. Funktsioon

$$v(t) = 4e^{-0{,}5t}$$

(millimeetrit tunnis) kirjeldab pinnase vajumise kiirust ajahetkel t, kus t on aeg tundides alates kella 7.00-st. Milline avaldis kirjeldab pinnase koguvajumist kella 12.30 seisuga, kui kella 7.00 ajal oli vajumine kokku 12 mm? Arvuta ka vajumise arvuline väärtus.

Lahendus. Aeg kella 7.00-st kuni 12.30-ni on

$$5{,}5 \text{ tundi.}$$

Pinnase koguvajumine kella 12.30-ks on

$$12 + \int_0^{5{,}5} v(t)\,dt = 12 + \int_0^{5{,}5} 4e^{-0{,}5t}\,dt.$$

Arvutame integraali:

$$\int_0^{5{,}5} 4e^{-0{,}5t}\,dt = -8e^{-0{,}5t}\Big|_0^{5{,}5} = -8e^{-0{,}5\cdot 5{,}5} + 8e^0 = 8\big(1 - e^{-2{,}75}\big).$$

Vajumine kokku:

$$12 + \int_0^{5{,}5} 4e^{-0{,}5t}\,dt = 12 + 8\big(1 - e^{-2{,}75}\big) \text{ mm.}$$

Ligikaudne väärtus:

$$8\big(1 - e^{-2{,}75}\big) \approx 7{,}49 \text{ mm},$$
$$12 + 7{,}49 \approx 19{,}49 \text{ mm}.$$

Vastus: Pinnase koguvajumine on 19,49 mm.

Ül 1.53. Arvuta töö, mis kulub vedru 0,04 m võrra pikemaks venitamisel, kui jõud 100 N pikendab vedru 0,01 m võrra.

Lahendus. Liikugu materiaalne punkt M mingi jõu mõjul piki Ox-telge, kusjuures jõu siht ja suund ühtib liikumise sihi ja suunaga. Sel juhul jõu F poolt tehtud töö punkti M nihkumisel asendist $x = a$ asendisse $x = b$ saame leida järgmise valemi abil:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Vedru korral kehtib Hooke'i seadus

$$F(x) = kx,$$

kus x on vedru pikenemine ja k on võrdetegur.
Antud on, et jõu $F = 100$ N korral on pikenemine $x = 0{,}01$ m. Seega

$$100 = k \cdot 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{100}{0{,}01} = 10000 \text{ N/m}.$$

Töö vedru venitamisel asendist $x = 0$ asendisse $x = 0{,}04$ m on

$$A = \int_0^{0{,}04} F(x)\,dx = \int_0^{0{,}04} 10000x\,dx = 10000 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}04}.$$

Seega

$$A = 5000 \cdot 0{,}04^2 - 5000 \cdot 0^2 = 5000 \cdot 0{,}0016 = 8 \text{ J}.$$

Vastus: Vedru venitamiseks kuluv töö $A = 8$ J.

Ül 1.54. Eksperimendi käigus mõõdeti vahelduvvoolu tugevust $i(t)$, mis toidab elektrimootorit. Voolutugevust mõõdeti iga 2 ms järel ja saadi järgmised väärtused:

t, ms	0	2	4	6	8	10	12
i, A	0	3	7,5	10	6	2,5	0

Leia laengu ligikaudne väärtus, mis läbib juhet antud ajavahemiku jooksul (12 ms).

Lahendus. Laeng on voolutugevuse integraal:

$$q = \int_0^{12} i(t)\,dt.$$

Kasutame Simpson'i valemit:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\big(f_0 + f_n + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{n-2})\big),$$

kus h on osalõikude pikkus. Antud juhul $h = 2$ ja väärtused on

$$f_0 = 0,\ f_1 = 3,\ f_2 = 7{,}5,\ f_3 = 10,\ f_4 = 6,\ f_5 = 2{,}5,\ f_6 = 0.$$

$$q \approx \frac{2}{3}\big(0+0+4(3+10+2{,}5)+2(7{,}5+6)\big)$$
$$= \frac{2}{3}\big(4\cdot 15{,}5+2\cdot 13{,}5\big) = \frac{2}{3}(62+27) = \frac{2}{3}\cdot 89 \approx 59{,}3.$$

Kuna aeg on antud millisekundites, on laengu ühik millikulon.

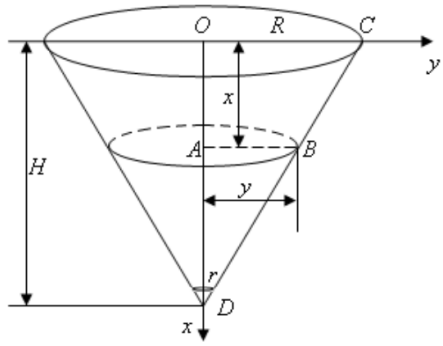
Vastus: $q \approx 59{,}3$ mC.

Ül 1.55. Veepuhastusjaamas kasutatakse vertikaalset tüvikoonusekujulisest terasest mahutit, mis on täidetud veega. Mahuti kõrgus on $H = 50$ cm, ülemise ava raadius on $R = 10$ cm ning põhjas oleva väljavooluava raadius on $r = 0{,}5$ cm.
Mahuti põhjas oleva ringikujulise ava kaudu lastakse vesi välja. Leida aeg T, mis kulub mahuti täielikuks tühjenemiseks.

Lahendus. Arvestame, et voolamine allub Torricelli seadusele ja vee viskoosus on $\mu = 0{,}6$. Sellisel juhul saame kasutada järgnevat valemit

$$T = \frac{1}{\mu s\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(x)}{\sqrt{H-x}}\,dx,$$

kus μ on vedeliku viskoossuskoefitsient, g raskuskiirendus, s anuma avause pindala, $S(x)$ on veepinna ristlõike pindala ning x kaugus põhjast.



Avause pindala on

$$s = \pi r^2 = \pi \cdot 0{,}005^2 = 0{,}000025\pi \text{ m}^2.$$

Aja t möödumisel on vee tase anumas $H - x$ ehk $0{,}5 - x$ meetrit (vaata joonist). Leiame sellele vastava ristlõike pindala $S(x)$ ning olgu telglõikeks kolmnurk, mitte trapets (kuna r on piisavalt väike võrreldes teiste suurustega).

Kuna kolmnurk DOC on sarnane kolmnurgaga DAB, siis vastavate külgede pikkused on võrdelised ehk

$$\frac{DO}{DA} = \frac{OC}{AB}$$

ning saame

$$\frac{0{,}5}{0{,}5-x} = \frac{0{,}1}{y}, \qquad \text{järelikult } y = 0{,}1 - 0{,}2x.$$

Seega veepinna ristlõike pindala

$$S(x) = \pi y^2 = \pi(0{,}1 - 0{,}2x)^2.$$

Asendame nüüd kõik vajalikud suurused valemisse:

$$T = \frac{1}{0{,}6 \cdot 0{,}000025\pi\sqrt{2 \cdot 9{,}8}} \int_0^{0{,}5} \frac{\pi(0{,}1 - 0{,}2x)^2}{\sqrt{0{,}5 - x}}\, dx.$$

Lihtsustame konstandid:

$$T = \frac{\pi}{0{,}000015\pi\sqrt{19{,}6}} \int_0^{0{,}5} \frac{(0{,}1 - 0{,}2x)^2}{\sqrt{0{,}5 - x}}\, dx = \frac{1}{0{,}000015\sqrt{98}} \int_0^{0{,}5} (0{,}1 - 0{,}2x)^{3/2}\, dx.$$

Teeme muutujavahetuse

$$t = 0{,}1 - 0{,}2x, \quad dt = -0{,}2\, dx, \quad dx = -5\, dt.$$

Kui $x = 0$, siis $t = 0{,}1$; kui $x = 0{,}5$, siis $t = 0$.

$$\int_0^{0{,}5} (0{,}1 - 0{,}2x)^{3/2}\, dx = -5 \int_{0{,}1}^{0} t^{3/2}\, dt = 5 \int_0^{0{,}1} t^{3/2}\, dt = 5 \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} \Big|_0^{0{,}1} = 2 \cdot 0{,}1^{5/2}.$$

Teeme muutujavahetuse

$$t = 0{,}1 - 0{,}2x, \quad dt = -0{,}2\, dx, \quad dx = -5\, dt.$$

Kui $x = 0$, siis $t = 0{,}1$; kui $x = 0{,}5$, siis $t = 0$.

$$\int_0^{0{,}5} (0{,}1 - 0{,}2x)^{3/2}\, dx = -5 \int_{0{,}1}^{0} t^{3/2}\, dt = 5 \int_0^{0{,}1} t^{3/2}\, dt = 5 \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} \Big|_0^{0{,}1} = 2 \cdot 0{,}1^{5/2}.$$

Seega

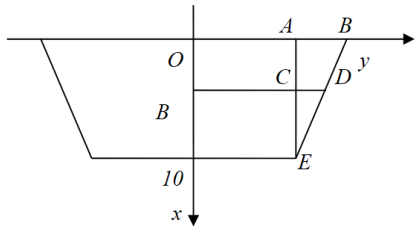
$$T = \frac{1}{0{,}000015\sqrt{98}} \cdot 2 \cdot 0{,}1^{5/2} \approx 42{,}6 \text{ s}.$$

Vastus: Mahuti tühjenemiseks kulub ligikaudu 42,6 sekundit.

Ül 1.56. Betoonist tammi ristlõikeks on võrdhaarne trapets. Vee poolel on tammi ülemise serva laius 100 m ja põhja juures laius 70 m. Vee sügavus tammi juures on 10 m.
Millist survet avaldab seisev vesi tammile?

Lahendus. Olgu x kaugus vee pinnalt allapoole ja $f(x)$ tammi laius vastaval sügavusel. Toetudes Pascali seadusele saame vedeliku survet vertikaalselt paigutatud plaadile arvutada järgmise valemi abil

$$P = \gamma \int_0^{10} x\, f(x)\, dx.$$



Jooniselt on näha, et tammile kogu surve arvutamisel võime esmalt määrata vedeliku surve tammi ühele poolele ning seejärel korrutada saadud väärtuse kahega.
Seega

$$P = 2\gamma \int_0^{10} x\, f(x)\, dx,$$

kus $\gamma = 1$ t/m^3. Järgmisena on vaja leida funktsioon $y = f(x)$ (sirge BE võrrand). Lõigul BE võtame suvaliselt punkti D koordinaatidega (x, y) ning täiendame joonist nii, et tekivad sarnased kolmnurgad ABE ja CDE. Kuna sarnaste kolmnurkade külgede pikkused on võrdelised, siis saame

$$\frac{CD}{AB} = \frac{EC}{EA}$$

ning

$$\frac{CD}{(100-70):2} = \frac{10-x}{10},$$

siit saame $CD = 15 - 1{,}5x$.
Kuna $OD = OC + CD$, siis

$$y = 35 + 15 - 1{,}5x,$$

järelikult

$$y = 50 - 1{,}5x.$$

Peale $f(x)$ asendamist saame:

$$P = 2\gamma \int_0^{10} x \cdot (50 - 1{,}5x)\, dx = 2 \cdot 1 \int_0^{10} (50x - 1{,}5x^2)\, dx.$$

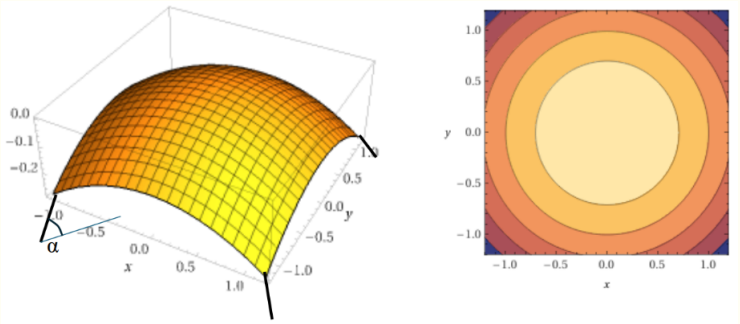
$$\begin{aligned} 2\int_0^{10} (50x - 1{,}5x^2)\, dx &= 2\left(\frac{50x^2}{2} - \frac{1{,}5x^3}{3}\right)\Big|_0^{10} \\ &= 2 \cdot 25 \cdot 10^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^3 \\ &= 5000 - 1000 = 4000. \end{aligned}$$

Vastus: Vesi avaldab tammile survet 4000 tonni.

1.6. Mitme muutuja funktsioonid

Ül 1.57. Projekteeritakse pöördparaboloidikujuline koorikkatus. Katuse mõõtmed on $10 \times 10 \times 5$ m ja selle pinda kirjeldab võrrand

$$z = f(x, y) = -0,1(x^2 + y^2) + 5.$$



Koorik kinnitatakse neljast punktist toevarrastega. Selleks, et minimiseerida koormus koorikule, toed peavad asetsema pinna puutuja suunas. Arvutage tugede nurk α horisontaaltasandi suhtes.

Lahendus. Leiame esmalt kooriku pinna ja tasandi $x = y$ lõikejoone. Selleks toome sisse muutuja u

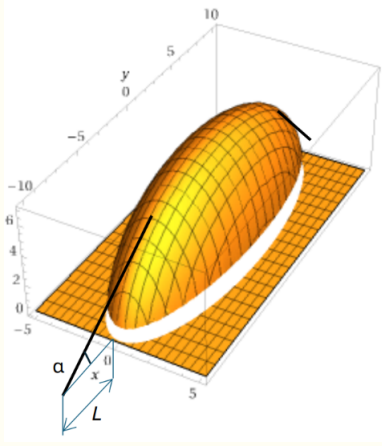
$$u^2 = x^2 + y^2.$$

Siis lõikejoone võrrand uz-tasandil on $z = -0,1\,u^2 + 5$. Lõikejoone puutuja on $\frac{dx}{du} = -0,2u$ ja tõus nurgapunktis koordinaadiga $u_0 = 5\sqrt{2}$ on $\arctan(\sqrt{2}) = 0,955$ radiaani ehk ligikaudu 55°.

Vastus: Toevarda nurk horisontaaltasandi suhtes on $\alpha = \arctan(\sqrt{2})\,\text{rad} \approx 55°$.

Ül 1.58. Projekteeritakse spordihall, mille katus on kirjeldatud võrrandiga

$$z = f(x, y) = \sqrt{(100 - y^2 - 9x^2) \cdot 0,5}.$$



pordihalli katus tugevdatakse tõmbidega, mis peavad olema kinnitatud punktides $x = 0$, $y = \pm 8\,\text{m}$ ning asetsema pinna puutuja suunas. Leia trossi nurk α horisontaaltasandi suhtes, trossi pikkus ning kinnituspinkti kaugus L.

1.7. Osatuletised ja täisdiferentsiaal

Ül 1.59. Ühemõõtmeline soojusjuhtimise diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.7}$$

kus funktsioon $u(x,t)$ kirjeldab ajahetkel t ruumi punktis x olevat temperatuuri ja k on keskkonda kirjeldav konstant.

1. Näidake, et funktsioon $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a\,t}\cos x$ on diferentsiaalvõrrandi (1.7) lahend ja leidke konstandi a väärtus
2. Vardale pikkusega $L = 1\,\mathrm{m}$ mõjub ajahetkel $t = 0$ temperatuuriväli
$$u(x,0) = 10\cos\frac{\pi\,x}{L}.$$
Leidke temperatuurijaotus $u(x,60)$ ja arvutage mitu korda on temperatuuriväli jahtunud ajahetkeks $t = 60\,\mathrm{s}$, kui $k = 0,003$.

Lahendus. **1.** Arvutame funktsiooni $u(x,t) = \mathrm{e}^{-a\,t}\cos x$ osatuletised ja asendame need diferentsaalvõrrandisse (1.7)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -a\mathrm{e}^{-a\,t}\cos x,\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\mathrm{e}^{-a\,t}\sin x, \qquad \Rightarrow \qquad -a\mathrm{e}^{-a\,t}\cos x = k\big(-\mathrm{e}^{-a\,t}\cos x\big).\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\mathrm{e}^{-a\,t}\cos x.
\end{aligned}$$

Näeme, et funktsioon $u(x,t)$ on diferentsiaalvõrrndi lahendiks kui $a = k$.

2. Temperatuurijaotus suvalisel ajahetkel t on

$$u(x,t) = 10\,\mathrm{e}^{-k\,t}\cos\frac{\pi\,x}{L} = 10\,\mathrm{e}^{-0,003\,t}\cos(\pi\,x).$$

Leiame temperatuurijaotuse ajahetkel $t = 0$ ja $t = 60$:

$$u(x,0) = 10\,\mathrm{e}^{-0,003\cdot 0}\cos(\pi\,x) = 10\cdot\cos(\pi\,x), \qquad u(x,60) = 10\,\mathrm{e}^{-0,003\cdot 60}\cos(\pi\,x).$$

Jagades avaldise $u(x,60)$ avaldisega $u(x,0)$, leiame, et $\mathrm{e}^{-0,003\cdot 60} \approx 0,84$.

Vastus: **1.** Funktsioon $u(x,t)$ on võrrandi (1.7) lahend kui $a = k$.
2. Temperatuuriväli jahtub $0,84$ korda.

Ül 1.60. Tabelis on antud soojusvaheti kasutegur η sõltuvalt seda läbivast õhu kogusest ajaühikus Q.

$Q(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}})$	100	200	300	400	500
$\eta(\%)$	70	71	70	66	61

Eesmärgiks on esitada η muutuja Q polünoomina, mille aste on võimalikult väike. Lineaarfunktsioon (st 1. astme polünoom) ei sobi kvalitatiivselt, sest tabelist on näha, et funktsiooni monotoonsus muutub (kasvamine läheb üle kahanemiseks). Seame eesmärgiks esitada η muutuja Q ruutpolünoomina

$$\eta = c_0 + c_1 Q + c_2 Q^2. \tag{1.8}$$

Kuna tabelis on antud 5 väärtust, aga funktsioon (1.8) sisaldab vaid 3 vabadusastet c_0, c_1, c_2, on ülesanne ülemääratud ja täpne lahendamine ei ole realistlik. Ülesannet saab lahendada nn vähimruutude meetodi abil, mis annab teatud mõttes parima ligikaudse lahendi. Selleks konstrueerime järgmise kolmemuutuja funktsiooni (nn vähimruutude funktsiooni):

$$J(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=1}^{5} \Big(c_0 + c_1 Q_i + c_2 Q_i^2 - \eta_i \Big)^2 ,$$

milles sisalduvad arvupaarid (Q_i, η_i) on võetud eeltoodud tabelist. Funktsiooni J miinimumpunkt ongi parim kordajate komplekt c_0, c_1, c_2.
Minimeerida funktsioon J ja konstrueerida vastav ruutpolünoom (1.8). Esitada saadud ruutpolünoom ja tabeli punktid graafiliselt.

Lahendus. Kuna vaadeldaval minimeerimisülesandel kitsendused puuduvad, on miinimumpunktis funktsiooni J gradient võrdne nulliga. Arvutame gradiendi komponendid:

$$\frac{\partial J}{\partial c_0}(c_0,c_1,c_2) = 2\sum_{i=1}^{5}\left(c_0 + c_1Q_i + c_2Q_i^2 - \eta_i\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_1}(c_0,c_1,c_2) = \sum_{i=1}^{5}\left(c_0 + c_1Q_i + c_2Q_i^2 - \eta_i\right)Q_i$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_2}(c_0,c_1,c_2) = 2\sum_{i=1}^{5}\left(c_0 + c_1Q_i + c_2Q_i^2 - \eta_i\right)Q_i^2$$

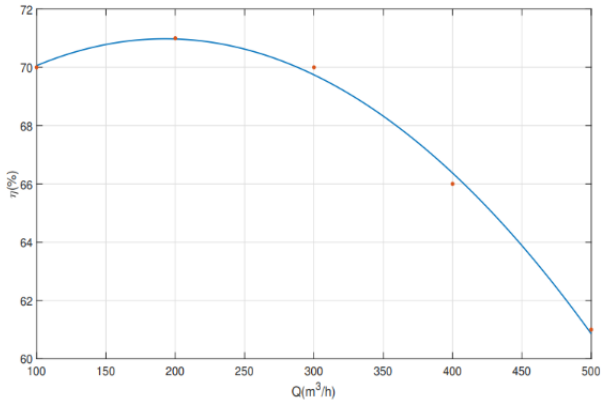
Pannes need võrduma nulliga, saame järgmise 3×3 lineaarse võrrandisüsteemi:

$$Ac = b,$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \sum_{i=1}^{5} Q_i & \sum_{i=1}^{5} Q_i^2 \\ \sum_{i=1}^{5} Q_i & \sum_{i=1}^{5} Q_i^2 & \sum_{i=1}^{5} Q_i^3 \\ \sum_{i=1}^{5} Q_i^2 & \sum_{i=1}^{5} Q_i^3 & \sum_{i=1}^{5} Q_i^4 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{5} \eta_i \\ \sum_{i=1}^{5} \eta_i Q_i \\ \sum_{i=1}^{5} \eta_i Q_i^2 \end{pmatrix}.$$

Sisestades siia Q_i ja η_i arvulised väärtused ja lahendades saadud süsteemi (nt Exceli või mõne matemaatikapaketi abil) saame $c_0 \approx 67$, $c_1 \approx 0.0413$, $c_2 \approx -0.0001$. Seega on otsitav polünoom järgmine: $\eta = 67 + 0.0413Q - 0.0001Q^2$.
Graafik:



Vastus: Otsitav polünoom on $\eta = 67 + 0.0413Q - 0.0001Q^2$.

Ül 1.61. Linnaplaneerija soovib leida mobiilside tugijaamale asukohta nii, et levi oleks võimalikult hea neljas kogunemiskohas (park, turg, bussijaam ja vaksal), mille koodinaadid on vastavalt

$$M_1(1,\,2),\ M_2(-3,\,1),\ M_3(-2,\,-2),\ M_4(2,\,-1).$$

Millisesse punkti tuleb paigutada tugijaama isotroopne antenn?

Isotroopse antenni kiirgusvõimsus jaotub ühtlaselt ümber antenni, moodustades kontsentrilised ringjooned, mille igas punktis on ühenduse kvaliteet ühesugune ja kvaliteet langeb antennist kaugenedes.

Lahendus. Antenn tuleb paigutada ringjoone

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

keskpunkti $K(a,\,b)$. Järelikult tuleb leida võrrand ringjoonele, millel asuvad kogunemiskohtadele vastavad punktid. Paraku üldjuhul neli vabalt valitud punkti ei paikne ühel ringjoonel. Antenni asukoha, so punkti $K(a,\,b)$ koordinaatide leidmiseks tuleb leida teatavas mõttes „parim" ringjoon, mille leidmiseks võime kasutada ringjoone võrrandi kaht erinevat kuju.

A) Tähistame ringjoone raadiuse ruudu $r^2=c$ ja kirjutame kanoonilise võrrandi ümber kujul

$$(x-a)^2+(y-b)^2-c=0.$$

Asendame viimase võrduse vasakusse poolde punktide $M_1,\,\ldots,\,M_4$ koordinaadid. Kuna üldjuhul need punktid ei asu üldjuhul ringjoonel, siis

$$\begin{array}{ll} M_1(\,1,\ 2) & (1-a)^2+(2-b)^2-c\neq 0\\ M_2(-3,\ 1) & (-3-a)^2+(1-b)^2-c\neq 0\\ M_3(-2,\,-2) & (-2-a)^2+(-2-b)^2-c\neq 0\\ M_4(\,2,\,-1) & (2-a)^2+(-1-b)^2-c\neq 0 \end{array}$$

Moodustame funktsiooni

$$F(a,b,c)=\Big((1-a)^2+(2-b)^2-c\Big)^2+\Big((-3-a)^2+(1-b)^2-c\Big)^2+\\ +\Big((-2-a)^2+(-2-b)^2-c\Big)^2+\Big((2-a)^2+(-1-b)^2-c\Big)^2$$

Juhul, kui punktid $M_1,\,\ldots,\,M_4$ paiknevad ühel ringjoonel, siis selle funktsiooni minimaalne väärtus on $F(a,b,c)=0$. Üldjuhul $F(a,b,c)>0$ ja leiame selle minimaalse väärtuse.

Leiame funktsiooni $F(a,b,c)$ osatuletised

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial a} &= 4\Big(4a^3+ab^2+6a^2+2b^2-4ac+64a+2b-2c+31\Big)\\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 4\Big(4a^2b+4b^3+4ab-4bc+2a+48b+1\Big)\\ \frac{\partial F}{\partial c} &= -8\Big(a^2+b^2+a-c+7\Big)\end{aligned}$$

Ekstreemumi tarviliku tingimuse põhjal moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}4a(a^2+b^2)+6a^2+2b^2-4ac+64a+2b-2c+31=0,\\ 4b(a^2+b^2)+4ab-4bc+2a+48b+1=0,\\ a^2+b^2=c-a-7.\end{cases}$$

Asendame viimasest võrrandist kahte esimesse ruutude summa a^2+b^2 ja pärast lihtsustamiset saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}34a+\ 2b+17=0,\\ 2a+20b+\ 1=0,\end{cases}\qquad\text{millest}\qquad a=-\frac{1}{2},\quad b=0.$$

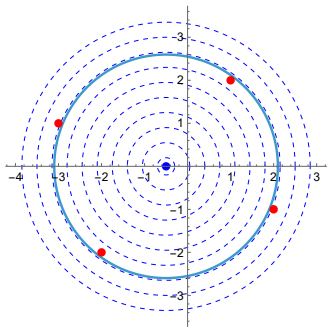
Võrrandisüsteemi viimasest võrrandist leiame, et

$$c=\frac{27}{4}\qquad\text{ja ringjoone võrrand on}\qquad\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+y^2=\frac{27}{4}.$$

Järelikult antenn tuleb paigutada punkti

$$K\Big(-\frac{1}{2},\ 0\Big).$$

Joonisel on leitud „parim” ringjoon sinine ja näeme, et punased koguenemispunktid sellel joonel ei paikne vaid on selle läheduses. Ringjoone võrrandi kordajate leidmiseks kasutatud võtet nimetatakse **vähimruutude meetodiks**.



B) Selle ülesande lahendamiseks võib kasutada ringjoone võrrandi teist kuju. Avades ringjoone kanoonilises võrrandis sulud, saab selle teisendada teist järku algebraliseks võrrandiks

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0,$$

mida nimetatakse ringjoone üldvõrrandiks. Asendame selle võrduse vasakusse poolde punktide $M_1, \ldots, M_4$ koordinaadid. Kuna üldjuhul need punktid ei asu ringjoonel, siis

$$\begin{array}{ll} M_1(\,1,\;\,2) & 2a+4b+c+\;\,5\neq 0\\ M_2(-3,\;\,1) & -6a+2b+c+10\neq 0\\ M_3(-2,\;-2) & -4a-4b+c+\;\,8\neq 0\\ M_4(\,2,\;-1) & 4a-2b+c+\;\,5\neq 0 \end{array}$$

Moodustame funktsiooni

$$F(a,b,c)=\big(2a+4b+c+5\big)^2+\big(-6a+2b+c+10\big)^2+\\ +\big(-4a-4b+c+8\big)^2+\big(4a-2b+c+5\big)^2$$

Juhul, kui punktid $M_1, \ldots, M_4$ paiknevad ühel ringjoonel, siis selle funktsiooni minimaalne väärtus on $F(a,b,c)=0$. Üldjuhul $F(a,b,c)>0$ ja leiame selle minimaalse väärtuse.
Leiame funktsiooni $F(a,b,c)$ osatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= \;\,4(36a+2b-2c-31)\\ \frac{\partial F}{\partial b} &= \;\,4(2a+20b-1)\\ \frac{\partial F}{\partial c} &= -8(a-c-7) \end{aligned}$$

Ekstreemumi tarviliku tingimuse põhjal moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 36a+2b-2c-31=0,\\ 2a+20b-1=0,\\ a-c-7=0. \end{cases}$$

Süsteemi viimasest võrrandist leiame, et $c=a-7$ ja pärast asendust ning lihtsustamist saame lineaarse võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 34a+\;\,2b=17,\\ 2a+20b=\;\,1, \end{cases} \qquad \text{millest} \qquad a=\frac{1}{2},\quad b=0,\quad c=-\frac{13}{2}.$$

Järelikult otsitava ringjoone üldvõrrand on

$$x^2+y^2+x-\frac{13}{2}=0.$$

Selle ringjoone keskpunkti leidmiseks teisendame võrrandit

$$x^2+2\cdot\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{4}+y^2=\frac{13}{2}+\frac{1}{4},$$

millest saame kanoonilise võrrandi

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{27}{4}.$$

Järelikult antenn tuleb paigutada punkti

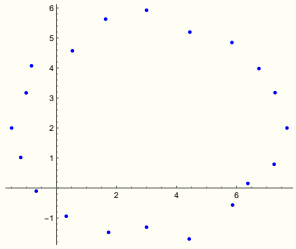
$$K\Big(-\frac{1}{2},\ 0\Big).$$

Vastus: Tugijaama antenn tuleb paigutada punkti $K\big(-\frac{1}{2},\ 0\big)$.

Ül 1.62. Mõõteseade registreerib punkte koordinaatidega

$$M_i(x_i,\ y_i), \qquad (i = 1,\ \ldots\ , n).$$

Ühe mõõteseeria punktide joonisele kandmisel tekkis pilt



Jooniselt näeme, et mõõteseeria punktid paiknevad peaaegu ringjoonel. Koostada vähimruutude meetodil võrrandisüsteem punkte M_i lähendava ringjoone üldvõrrandi

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

kordajate a, b ja c leidmiseks.

Lahendus. Oletame, et mõõteseeria sisaldab n punkti ja moodustame kolme muutuja funktsiooni

$$F(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i^2 + y_i^2 + 2ax_i + 2by_i + c\big)^2.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2\big(x_i^2 + y_i^2 + 2ax_i + 2by_i + c\big) \cdot 2x_i =$$

$$= 4\Big[2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)a + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)b + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)c + \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i^2 + y_i^2)\Big]$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\Big(x_i^2 + y_i^2 + 2ax_i + 2by_i + c\Big) \cdot 2y_i =$$

$$= 4\Big[2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)a + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)b + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)c + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i^2 + y_i^2)\Big]$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2\Big(x_i^2 + y_i^2 + 2ax_i + 2by_i + c\Big) \cdot 1 =$$

$$= 4\Big[2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)a + 2\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big)b + n \cdot c + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\Big]$$

Ekstreemumi tarviliku tingimuse põhjal moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\Big)a + 2\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)b + \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)c + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(x_i^2 + y_i^2) = 0, \\ 2\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)a + 2\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\Big)b + \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\Big)c + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(x_i^2 + y_i^2) = 0, \\ 2\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)a + 2\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\Big)b + n \cdot c + \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Selle lineaarse võrrandisüsteemi lahendid on otsitava ringjoone üldvõrrandi

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

kordajad a, b ja c. Selle ringjoone keskpunkti leidmiseks tuleb teha teisendus

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 = a^2 + b^2 - c,$$

millest saame ringjoone kanoonilise võrrandi

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2, \quad \text{kus} \quad r^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Selle ringjoone keskpunkti koordinaadid on $K(-a, -b)$.

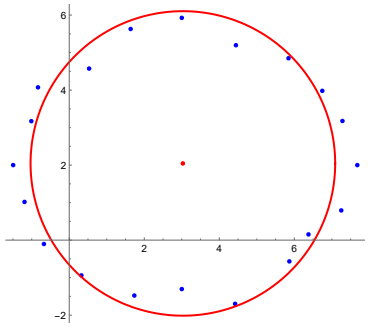
Ringjoone määrab ainult selline kodajate komplekt, mille korral $a^2 + b^2 - c > 0$.

Ülesande tekstis oleva joonise punktide põhjal konstrueeritud ringjoone parameetrilised võrrandid on

$$\begin{cases} x = 3.03 + 4.06 \cos t, \\ y = 2.04 + 4.06 \sin t. \end{cases}$$

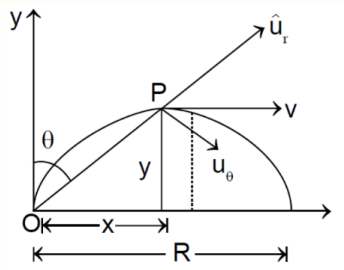
Kanname leitud ringjoone, selle keskpunkti ja antud punktid samale joonisele (vt joonis 1.1).

Vastus: Ringjoone võrrandi $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ kordajate leidmiseks tuleb lahendada lineaarne võrrandisüsteem (1.9).



Joonis 1.1: Vähimruutude meetodil leitud ringjoon

Ül 1.63. Kivi visatakse algkiirusega v_0 nurga θ_0 all horisondi suhtes. Leia kivi nurkkiirus viskepunkti suhtes, kui kivi asub oma maksimaalsel kõrgusel $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$, kus g on raskuskiirendus.



Lahendus. Kivi kohavektor suvalises punktis P on antud avaldisega

$$\mathbf{r}(P) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},$$

milles võime x-suunalise projektsiooni esitada viskenurga θ kaudu

$$\mathbf{r}(P) = y \tan\theta\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}.$$

Leiame kivi liikumise kiiruse, võttes kohavektorist tuletise aja järgi

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\tan\theta + \frac{y}{\cos^2\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\,\mathbf{j},$$

Kivi trajektoori kõrgeimas punktis

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad y = h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}.$$

Kiiruse horisontaalsuunaline vektor selles punktis

$$v_0 \cos\theta_0 \, \mathbf{i} = \frac{y}{\cos^2 \theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} \, \mathbf{i}$$

Nurkkiirus on antud seosega

$$\omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{v_0 \cos\theta_0}{h} \cos^2 \theta$$

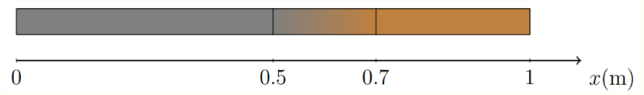
Vastus: Nurkkiirus $\omega = \frac{v_0 \cos\theta_0}{h} \cos^2 \theta$.

1.8. Kordsed integraalid

Ül 1.64. Joonisel kujutatud funktsionaalselt gradeeritud materjalist tala ruudukujulise ristlõikega 5×5cm ja pikkusega 1m koosneb kolmest osast: metall tihedusega $7800\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (hall), keraamiline materjal tihedusega $1500\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (pruun) ja gradeeritud üleminekuala nende vahel (värv muutub), mille tihedus avaldub valemiga

$$\varrho(x) = 7800 + (1500 - 7800)\left(\frac{x-0.5}{0.7-0.5}\right)^2, \quad 0.5 < x < 0.7.$$

Arvutada tala mass.



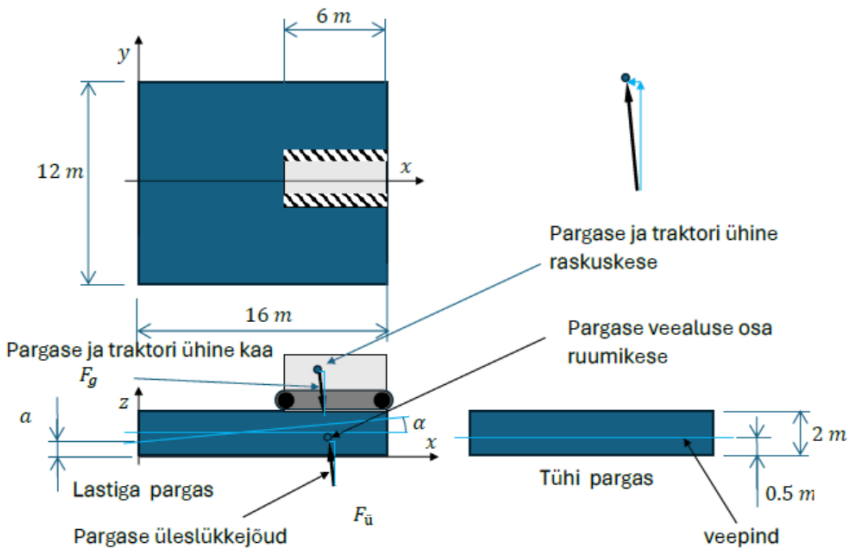
Lahendus. Olgu talaga ristuva tasandi teljed y ja z. Ristlõikeks on ruut $-0.05 < y < 0.05$, $-0.05 < z < 0.05$. Mass avaldub kolmekordse integraalina:

$$\begin{aligned}
m &= \int_{-0.05}^{0.05}\int_{-0.05}^{0.05}\int_0^1 \varrho(x)\,dxdydz = \int_{-0.05}^{0.05}\int_{-0.05}^{0.05} dydz \int_0^1 \varrho(x)\,dx = \\
&= 0.01\int_0^1 \varrho(x)\,dx = \\
&= 0.01\left(7800\int_0^{0.5} dx + \int_{0.5}^{0.7}\left(7800 - \frac{6300}{0.2^2}(x-0.5)^2\right)dx + 1500\int_{0.7}^1 dx\right) = \\
&= 0.01\left(3900 + \left(7800x - \frac{6300}{0.2^2}\frac{(x-0.5)^3}{3}\right)\Big|_{0.5}^{0.7} + 450\right) = 54.9\,\text{kg}
\end{aligned}$$

Vastus: Tala mass $m = 54.9\,\text{kg}$.

Ül 1.65. Riskülikukujulise tekipinnaga pargas ujub vees. Sellele sõidab kailt peale linttraktor massiga 75 t. Pargase süvis ilma lastita oli 0.5 m. Pargase pikkus on 16 m ja laius 12 m. Linttraktori pikkus 6 m. Traktori raskuskese asub pikisuunas traktori keskel ja vertikaalsihis maapinnast 2.5 m kõrgusel. Võib oletada, et pargase raskuskese asub kõrgussuunas pargase keskel. Millise nurga alla jääb pargas veepinna suhtes peale lasti paigaldamist kui vee tiheduseks lugeda $1\,\mathrm{t/m^3}$?

Lahendus. Ülesandes kirjeldatud olukorda iseloomustab joonis.



Kui traktor sõidab pargasele, siis kaldub pargas nii, et traktori pool vajub sügavamale vette. Pargase asendi määrab traktori ja pargase ühise raskuskeskme asukoht ja pargase veealuse osa ruumikese. Kuna pargas kaldub, siis liigub pargase veealuse osa ruumikese traktori poole. Pargase veealuse osa veeväljasurve (üleslükkejõud) peab võrduma pargase ja traktori kaaluga. Teisalt peab pargase üleslükkejõud, mis mõjub pargase veealuse osa ruumikeskmesse, asetsema samal sirgel pargase ja traktori ühises raskuskeskmes mõjuva summaarse raskusjõuga.

Leiame esmalt pargase kaalu, mis on võrdne pargase veealuse osa ruumala kaaluga, kui see oleks täidetud veega. Seetõttu saame pargase kaaluks $12 \cdot 16 \cdot 0.5 \cdot 1 = 96\,tonni$.

Pargase ja traktori kaal kokku on $F_p = 96 + 75 = 171$ *tonni*. Pargase ja traktori ühise vertikaalse ning horisontaalse raskuskeskme saame leida kui teame traktori ja pargase enda raskuskeskme asukohti ja kaale. Uue raskuskeskme arvutame välja joonisel oleva koordinaatsüsteemi alguspunkti suhtes.

$$x_{lp} = \frac{96 \cdot 16/2 + 75 \cdot (16 - 3)}{96 + 75} = 10.19\,\mathrm{m}$$

$$z_{lp} = \frac{96 \cdot 1 + 25 \cdot (2 + 2.5)}{96 + 75} = 2.54\,\mathrm{m}$$

Kujutame nüüd ette, et pargase kaldumise asemel liigub meil veepind uude asendisse. Määrame selle asendi joone abil, mis on määratud koordinaatide alguspunkti suhtes kasutades parameetrit a ja nurka α. Ehk kaldunud veeliini avaldis oleks $a + \tan(\alpha) \cdot x$. Parameeter α ongi meie otsitav kaldenurk.

Määrame integraali abil pargase veealuse osa ruumala oletades, et B on pargase laius ja L on pargase pikkus.

$$V_p = 2 \int_0^L \int_0^{\frac{B}{2}} \int_0^{a + x \tan\alpha} dz dy dx,$$

millest peale integreerimist saame

$$V_p = B\Big(a\,L + \frac{L^2}{2} \tan\alpha\Big).$$

Jagame nüüd joonisel näidatud pargase kaalu ja pargase üleslükkejõu horisontaalseks komponendiks ja vertikaalseks komponendiks ning arvutame momendi koordinaatide alguspunkti suhtes.

Kui pargas kaldub (veeliin kaldub pargase suhtes), siis on pargase kaalu vertikaalne komponent $F_g \cos(\alpha)$ ja horisontaalne komponent $F_g \sin(\alpha)$.

Sarnaselt saame üleslükkejõu vertikaalse komponendi $F_{\ddot{u}} \cos(\alpha)$ ja horisontaalse komponendi $F_{\ddot{u}} \sin(\alpha)$.

Pargase asendi paneb paika jõudude ja momentide tasakaal. Pargase kaal peab olema võrdne üleslükkejõuga ja üleslükkejõu arvutame ruumala V_p kaudu.

$$V_p \varrho = F_p$$

ehk

$$F_p = \varrho B\Big(a\,L + \frac{L^2}{2} \tan\alpha\Big). \tag{1.10}$$

Lisaks jõule peavad olema tasakaalus ka momendid.

Kaalust tingitud moment koordinaatide alguspunkti suhtes on

$$F_p \cos\alpha \cdot x_{lp} + F_p \sin\alpha \cdot z_{lp}.$$

Üleslükkejõust tingitud momentide arvutamine on pisut keerulisem. Arvutame esmalt vertikaalsest komponendist tingitud momendi. Elementaarruumalaga dV on seotud vertikaalselt mõõdetud koordinaadi x. Elementaarruumalale mõjuv üleslükkejõu vertikaalne komponent on $dV\,\cos(\alpha)$ ja selle poolt tekitatud moment nullpunkti suhtes on $dV\,\cos(\alpha)\,x$ (jõud korda õlg).

Leiame üleslükkejõu vertikaalsest komponendist põhjustatud momendi kogu pargase jaoks kasutades integraali

$$M_v = \varrho \iiint_V x\,\cos\alpha\,dV$$

ehk

$$M_v = 2\varrho \int_0^L \int_0^{\frac{B}{2}} \int_0^{a+x\tan\alpha} x\,\cos\alpha\,dz dy dx.$$

Peale integreerimist saame vertikaalsest üleslükkejõu komponendist momendi

$$M_v = \varrho\,B\,L^2\cos\alpha\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{L}{3}\tan\alpha\right).$$

Üleslükkejõu horisontaalsest komponendist põhjustatud momendi kogu pargase jaoks saame samuti kasutades integraali

$$M_h = \varrho \iiint_V z\,\sin\alpha\,dV$$

ehk

$$M_h = 2\varrho \int_0^L \int_0^{\frac{B}{2}} \int_0^{a+x\tan\alpha} z\,\sin\alpha\,dz dy dx.$$

Pärast integreerimist

$$M_h = \frac{\varrho\,B\,L}{2}\,\sin\alpha\cdot\left(a^2+a\,L\,\tan\alpha+\frac{L^2}{3}\tan^2\alpha\right).$$

Pargase kaalust ja üleslükkejõust tingitud momendid peavad olema võrdsed

$$\begin{aligned} F_p\,x_{lp}\cos\alpha + F_p\,z_{lp}\sin\alpha = {} & \varrho\,B\,L^2\cos\alpha\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{L}{3}\tan\alpha\right)+ \\ & +\frac{\varrho\,B\,L}{2}\,\sin\alpha\cdot\left(a^2+a\,L\,\tan\alpha+\frac{L^2}{3}\tan^2\alpha\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Koos kaalu ja üleslükkejõu tasakaaluga saime parameetrite a ja α määramiseks võrdused (1.10) ja (1.11). Võrdusest (1.10) leiame

$$a = \frac{F_p}{\varrho\,B\,L} - \frac{L}{2}\tan\alpha.$$

Asendame parameetri a momendivõrrandisse (1.11), millest pärast lihtsustamist saame

$$F_p\,x_{lp}\cos\alpha + F_p\,z_{lp}\sin\alpha = \varrho B\,L^2\cos\alpha\cdot\Big(\frac{F_p}{2\varrho\,B\,L} - \frac{L}{4}\tan\alpha + \frac{L}{3}\tan\alpha\Big) + \\ + \frac{\varrho\,B\,L}{2}\sin\alpha\cdot\Bigg(\Big(\frac{F_p}{\varrho\,B\,L} - \frac{L}{2}\tan\alpha\Big)^2 + \\ + L\Big(\frac{F_p}{\varrho\,B\,L} - \frac{L}{2}\tan\alpha\Big)\tan\alpha + \frac{L^2}{3}\tan^2\alpha\Bigg). \tag{1.12}$$

Jagame võrrandi (1.11) mõlemad pooled läbi $\varrho\cos\alpha$ ja arvestame, et $V_p\,\varrho = F_p$ saame uue võrrandi

$$V_p\,x_{lp} + V_p\,z_{lp}\tan\alpha = B\,L^2\cdot\Big(\frac{V_p}{2B\,L} - \frac{L}{4}\tan\alpha + \frac{L}{3}\tan\alpha\Big) + \\ + \frac{B\,L}{2}\tan\alpha\cdot\Bigg(\Big(\frac{V_p}{B\,L} - \frac{L}{2}\tan\alpha\Big)^2 + \\ + L\Big(\frac{V_p}{B\,L} - \frac{L}{2}\tan\alpha\Big)\tan\alpha + \frac{L^2}{3}\tan^2\alpha\Bigg).$$

Nüüd avame sulud

$$V_p\,x_{lp} + V_p\,z_{lp}\tan\alpha = B\,L^2\cdot\Big(\frac{V_p}{2B\,L} - \frac{L}{4}\tan\alpha + \frac{L}{3}\tan\alpha\Big) + \\ + \frac{B\,L}{2}\tan\alpha\cdot\Big(\frac{V_p^2}{B^2L^2} - \frac{V_p}{B}\tan\alpha + \frac{L^2}{4}\tan^2\alpha + \\ + \frac{V_p}{B}\tan\alpha - \frac{L^2}{2}\tan^2\alpha + \frac{L^2}{3}\tan^2\alpha\Big).$$

Rühmitame viimase avaldise liikmed $\tan\alpha$ astmete järgi:

$$\frac{B\,L^3}{24}\tan^3\alpha + \Big(\frac{V_p^2}{2B\,L} + \frac{B\,L^3}{12} - V_p z_{lp}\Big)\tan\alpha + V_p\Big(\frac{L}{2} - x_{lp}\Big) = 0, \tag{1.13}$$

mis on kuupvõrrand pargase kaldenurga α tangensi määramiseks.

Teeme esmalt oletuse, et pargase kaldenurk α on väike, so $\tan^3\alpha \approx 0$, siis saame võrrandit (1.13) lihtsustada

$$\Big(\frac{V_p^2}{2B\,L} + \frac{B\,L^3}{12} - V_p z_{lp}\Big)\tan\alpha + V_p\Big(\frac{L}{2} - x_{lp}\Big) = 0,$$

millest

$$\tan\alpha = \frac{-V_p\Big(\frac{L}{2} - x_{lp}\Big)}{\Big(\frac{V_p^2}{2B\,L} + \frac{B\,L^3}{12} - V_p z_{lp}\Big)}.$$

Ülesande algandmete põhjal saame, et $\alpha \approx 5.73^\circ$. Siinjuures on suurus V_p arvutatudpargase ja traktori kogukaalu abil.

Juhul, kui soovime ikkagi lahendada kuupvõrrandit, siis tuleb lähtevõrrand (1.13) teisendada kujule

$$\tan^3\alpha + \frac{24}{B\,L^3}\left(\frac{V_p^2}{2B\,L} + \frac{B\,L^3}{12} - V_p z_{lp}\right)\tan\alpha + \frac{24V_p}{B\,L^3}\left(\frac{L}{2} - x_{lp}\right) = 0. \tag{1.14}$$

Kuupvõrrandi $y^3 + p\,x + q = 0$ lahendamiseks Cardano valemeid. Selleks toome sisse abisuurused

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{ja} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Siin kuupvõprrandi lahendite iseloom sõltub diskriminandi

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

märgist. Kui $D > 0$, siis on kuupvõrrandil üks reaalarvuline ja kaks kompleksarvulist lahendit. Sellel juhul reaalarvuliseks lahendiks on

$$y = u + v.$$

Asendame ülesande algandmed võrrandisse (1.14) saame kuupvõrrandi

$$\tan^3\alpha + 1.826\tan\alpha - 0.183 = 0,$$

seega $p = 1.826$ ja $q = -0.183$. Leiame diskriminandi

$$D = \left(\frac{-0.183}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.826}{3}\right)^3 = 0.234 > 0.$$

Seega

$$u = \sqrt[3]{\frac{0.183}{2} + \sqrt{0.234}} = 0.832 \quad \text{ja} \quad v = -\sqrt[3]{\sqrt{0.234} - \frac{0.183}{2}} = -0.732.$$

millest

$$\tan\alpha = u + v \approx 0.1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan(0.1) \approx 0.0997 \quad \text{ehk} \quad \alpha \approx 5.71^\circ.$$

Märkus. Suuremate nurkade puhul võib tekkida olukord, et antud avaldised enam ei kehti või neid tuleb oluliselt täiendada. Selline olukord tuleb ette siis, kui vesi jõuab pargase tekini või kui pargase põhi tõuseb veepiirist kõrgemale. Sellisel juhul nurga suurenedes moment enam ei kasva endise kiirusega ja lõpuks võib pargas ka ümber minna (kaotada stabiilsuse).

Vastus: Pargase kaldenurk lineaarses mudelis $\alpha \approx 5.73^\circ$, kuupmudelis $\alpha \approx 5.71^\circ$.

Ül 1.66. Leida ellipsi pindala, kui ellipsi poolteljed on a ja b.

Lahendus. Meenutame, et kahekordses integraalis muutujavahetuse sooritamiseks tuleb kasutada valemit

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

kus D' on piirkonna D kujutis uutes koordinaatides ja J on Jakobiaan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Teame, et tasandilise kujundi pinadala leidmiseks tuleb leida kahekordne integaal

$$S = \iint\limits_D 1dxdy,$$

kus integreerimispiirkonnaks D on vaadeldav kujund.

Valime koordinaatteljestiku nii, et koordinaatide alguspunkt asuks ellipsi keskpunktis ja ellipsi (pea)teljed asuksid koordinaattelgedel. Sellises teljestikus on ellipsi võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Integreerimiseks teeme muutujavahetuse (läheme üle elliptilistele koordinaatidele). Valime uued muutujad r ja φ nii, et

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi, \\ y = br\sin\varphi. \end{cases}$$

Selle muutujavahetuse korral kirjeldab φ polaarnurka, r on aga venitatud polaarkaugus. Kahekordses integraalis muutujavahetuse sooritamiseks leiame piirkonna kujutise uutes koordinaatides. Uutes koordinaatides avaldub ellipsi võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(ar\cos\varphi)^2}{a^2} + \frac{(br\sin\varphi)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1.$$

Kuna kaugus peab olema positiivne, siis on ellipsi võrrandiks elliptilistes koordinaatides $r = 1$. Ellipsi sisepiirkond on kirjeldatav võrratustega

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

(sest nurk võib olla ükskõik milline, kuid kogu piikonna tahame läbi käia ainult ühe korra).

Leiame Jakobiaani $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$. Esmalt arvutame osatuletised

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial r} = a\cos\varphi, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -ar\sin\varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial r} = b\sin\varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = br\cos\varphi. \end{array}$$

Seejärel arvutame determinandi

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = a\cos\varphi \cdot br\cos\varphi - (-ar\sin\varphi)b\sin\varphi =$$

$$= abr(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = abr$$

Kuna $r \geq 0$, siis Jakobiaani absoluutväärtus $|J| = abr$. Ellipsi pindala on leitav kui kahekordse integraali väärtus

$$S = \iint\limits_D 1dx\,dy = \iint\limits_{D'} 1 \cdot abr dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 abr\,dr = \int\limits_0^{2\pi} ab\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} ab \cdot \frac{1}{2} d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ab}{2} d\varphi = \frac{ab}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = ab\,\pi.$$

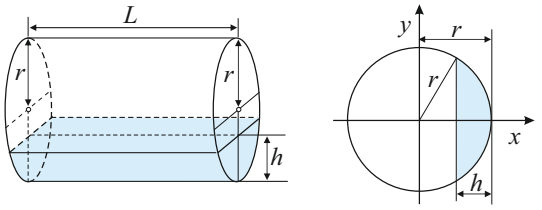
Märkus. Kui ellipsi poolteljed $a = b = r$, saame ringi pindala valemi $S = \pi r^2$. Elliptilist muutujate vahetust kasutatakse ülesande 1.72 lahenduses.

Teise võimaluse ellipsi pindala leidmiseks annab ülesande 2.15 lahendus.

Vastus: Ellipsi pindala $S = ab\,\pi$.

Ül 1.67. Tankla kütusemahutiks on pöördsilinder, mille telg on horisontaalne. Teades mahuti mõõtmeid, koostada funktsioon selles oleva vedeliku ruumala määramiseks täitekõrguse h järgi.

Lahendus. Teeme ülesande kirjeldusele vastava joonise.



Silindri põhja piirava ringjoone võrrand on

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Ringjoone segmendi pindala leidmiseks tuleb arvutada määratud integraal:

$$S = 2\int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Leiame määramata inetgraali

$$I = \int \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Selleks teeme muutujate vahetuse

$$x = r\sin t \qquad \Rightarrow \qquad dx = r\cos t dt$$

$$I = \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t dt = r^2\int \cos^2 t dt = \frac{r^2}{2}\int \big(1 + \cos(2t)\big)dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}t + \frac{r^2}{4}\int \cos(2t)d(2t) = \frac{r^2}{2}t + \frac{r^2}{4}\sin(2t) = \frac{r^2}{2}\big(t + \cos t\sin t\big).$$

Läheme tagasi esialgsele muutujale x:

$$\sin t = \frac{x}{r}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r}, \quad t = \arcsin\frac{x}{r}.$$

Seega

$$I = \int \sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\Big(r^2\arcsin\frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2}\Big). \tag{1.15}$$

Newton-Leibnizi valemi põhjal saame ringi segmendi pindala arvutamiseks valemi:

$$S = 2I = \left(r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2} \right) \Bigg|_{r-h}^{r} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} - r^2 \arcsin \frac{r-h}{r} - (r-h)\sqrt{h(2r-h)}\,.$$

Kuna

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \alpha = \arccos \alpha,$$

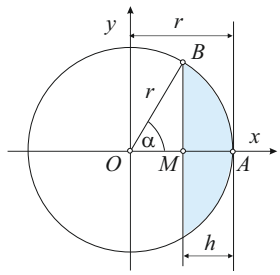
siis saame viimase teisenda kujule

$$S = r^2 \arccos \frac{r-h}{r} - (r-h)\sqrt{h(2r-h)}\,. \tag{1.16}$$

Järelikult on mahutis täitekõrgusele $h \leqslant r$ vastav kütuse ruumala

$$V_s(L, r, h) = L\left(r^2 \arccos \frac{r-h}{r} - (r-h)\sqrt{h(2r-h)} \right)$$

Ringi segmendi pindala võime leida teisiti, kasutades selleks polaarkoordinaate.



Joonis 1.2: Ringi segment

Polaarkoordinaatide korral saame joonega $\rho = \rho(\varphi)$ piiratud kujundi pindala arvutada määratud integraaliga

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi,$$

seega ringi sektori $\sphericalangle OAB$ (vt joonis 1.2) pindala on

$$S_{\sphericalangle OAB} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \alpha \qquad \Rightarrow \qquad S_{\sphericalangle OAB} = \frac{1}{2} r^2 \arccos \frac{r-h}{r}$$

Kolmnurga $\triangle OMB$ pindala

$$S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2}(r-h)\sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \frac{1}{2}(r-h)\sqrt{h(2r-h)}$$

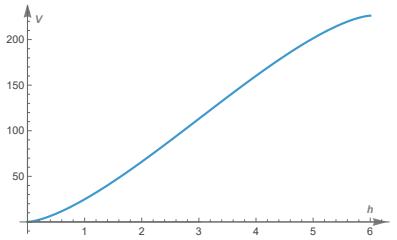
Järelikult ringi segmendi pindala

$$S = 2S_{\sphericalangle OAB} - 2S_{\triangle OMB} = r^2 \arccos\frac{r-h}{r} - (r-h)\sqrt{h(2r-h)}\,,$$

mis langeb kokku eespool tuletatud valemiga (1.16).

Kasutatud tähistes on mahutiks oleva silindri ruumala

$$V = V(L,r) = \pi r^2 L.$$



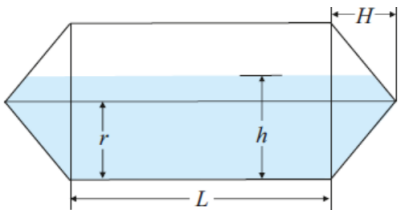
Joonis 1.3: Mahuti täitumine, mõõtmed $L = 0, r = 3$.

Vastus: Otsitava funktsiooni, so täitekõrgusele $h \leqslant 2\,r$ vastava ruumala leidmiseks, saame esitada kujul:

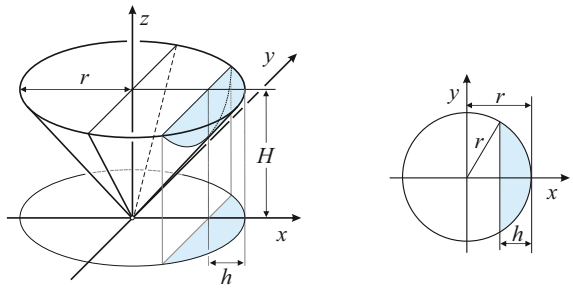
$$V_s(L,r,h) = L\left(r^2 \arccos\frac{r-h}{r} - (r-h)\sqrt{h(2r-h)}\right).$$

Ül 1.68. Tankla kütusemahutiks on kooniliste otstega pöördsilindr, mille telg on horisontaalne. Teades mahuti mõõtmeid, leida selles oleva vedeliku ruumala täitekõrguse h järgi.

Lahendus. Teeme ülesande kirjeldusele vastava joonise.



Valime koordinaatide süsteemi nii, et koonuse tipp on koordinaatide alguspunktiks ja koonuse telg z-teljeks.



Selliselt valitud koordinaatide süsteemi korral on koonuse võrrand

$$z = \frac{H}{r}\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$V_{ks} = 2\int_{r-h}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_{\frac{H}{r}\sqrt{x^2+y^2}}^{H} dz$$

$$V_{ks} = 2\int_{r-h}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(H - \frac{H}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right) dy = \frac{2H}{r}\int_{r-h}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(r - \sqrt{x^2+y^2}\right) dy$$

Leiame määramata inetgraali (siin on veidi pusimist, vt. määramata integraali ülesannet):

$$\int \left(r - \sqrt{x^2+y^2}\right) dy = ry - \frac{1}{2}\left(x^2 \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) + y\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Määratud integraal

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(r - \sqrt{x^2+y^2}\right) dy =$$

$$= \left(ry - \frac{1}{2}\left(x^2 \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) + y\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{r^2-x^2}} =$$

$$= r\sqrt{r^2-x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2 \ln\left(r + \sqrt{r^2-x^2}\right) + r\sqrt{r^2-x^2}\right) + \frac{1}{2}x^2 \ln x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r\sqrt{r^2-x^2} + x^2 \ln x - x^2 \ln\left(r + \sqrt{r^2-x^2}\right)\right).$$

Arvutame integraali

$$\int \left(r\sqrt{r^2-x^2} + x^2 \ln x - x^2 \ln\left(r + \sqrt{r^2-x^2}\right)\right) dx =$$

$$= r\int\sqrt{r^2-x^2}dx + \int x^2\ln x dx - \int x^2\ln\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)dx$$

Integreerime liidetavaid eraldi

$$r\int\sqrt{r^2-x^2}dx = \frac{r}{2}\left(r^2\arcsin\frac{x}{r} + x\sqrt{r^2-x^2}\right)$$

$$\int x^2\ln x dx = \left[\begin{array}{cc} u=\ln x & dv=x^2dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=\frac{1}{3}x^3 \end{array}\right] = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3$$

$$\int x^2\ln\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)dx = \left[\begin{array}{cc} u=\ln\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right) & dv=x^2dx \\ du=\frac{-x}{\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{r^2-x^2}}dx & v=\frac{1}{3}x^3 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right) + \frac{1}{3}\int\frac{x^4}{\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

Leiame kolmanda integraalis oleva osaintegraali

$$\int\frac{x^4}{\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{r^2-x^2}}dx = \left[\begin{array}{cc} u^2=r^2-x^2 & x=\sqrt{r^2-u^2} \\ udu=-x\,dx & \end{array}\right] =$$

$$= -\int\frac{x^3u}{\left(r+u\right)u}du = -\int\frac{(r^2-u^2)\sqrt{r^2-u^2}}{\left(r+u\right)}du =$$

$$= -\int(r-u)\sqrt{r^2-u^2}du =$$

$$= -r\int\sqrt{r^2-u^2}du + \int u\sqrt{r^2-u^2}du.$$

Leiame esimeseks liidetavaks oleva integraali ja teisendame selle esialgsele muutujale x

$$-r\int\sqrt{r^2-u^2}du = -\frac{r}{2}\left(r^2\arcsin\frac{u}{r} + u\sqrt{r^2-u^2}\right)$$

$$= -\frac{r}{2}\left(r^2\arcsin\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} + x\sqrt{r^2-x^2}\right).$$

Teiseks liidetavaks olevast integeaalist

$$\int u\sqrt{r^2-u^2}du = \left[\begin{array}{c} \omega=r^2-u^2 \\ d\omega=-2u\,du \end{array}\right] = -\int\sqrt{\omega}\,d\omega = -\frac{1}{3}\omega^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(r^2-u^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}x^3.$$

Kokkuvõtteks saame, et määramata integraal on

$$\int\left(r\sqrt{r^2-x^2} + x^2\ln x - x^2\ln\left(r+\sqrt{r^2-x^2}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{r}{2}\left(r^2\arcsin\frac{x}{r} + x\sqrt{r^2-x^2}\right) + \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 -$$

$$-\frac{1}{3}\Big(x^3\ln\big(r+\sqrt{r^2-x^2}\big)-\frac{r}{2}\Big(r^2\arcsin\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}+x\sqrt{r^2-x^2}\Big)-\frac{1}{3}x^3\Big)=$$

$$=\frac{2}{3}rx\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^3}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{r^3}{6}\arcsin\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}+\frac{1}{3}x^3\big(\ln x-\ln(r+\sqrt{r^2-x^2})\big).$$

Nüüd saame leida koonuse segmendi ruumala

$$V_{ks}=\frac{2H}{r}\int_{r-h}^{r}I_1dx=\frac{H}{r}\int_{r-h}^{r}\Big(r\sqrt{r^2-x^2}+x^2\ln x-x^2\ln\big(r+\sqrt{r^2-x^2}\big)\Big)dx=$$

$$=\frac{H}{r}\Big(\frac{2}{3}rx\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^3}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\frac{r^3}{6}\arcsin\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}+\frac{1}{3}x^3\big(\ln x-\ln(r+\sqrt{r^2-x^2})\big)\Big)\Big|_{r-h}^{r}=$$

$$=\frac{H}{r}\Big(\frac{\pi r^3}{4}-\frac{2}{3}r(r-h)\sqrt{r^2-(r-h)^2}-\frac{r^3}{2}\arcsin\frac{r-h}{r}-\frac{r^3}{6}\arcsin\frac{\sqrt{r^2-(r-h)^2}}{r}-$$

$$-\frac{1}{3}(r-h)^3\big(\ln(r-h)-\ln(r+\sqrt{r^2-(r-h)^2})\big)\Big).$$

Koonuse segemendi ruumala arvutamise valemi, tingimusel $h<r$, saame esitada kompaktsemalt

$$V_{ks}=\left(\frac{\pi r^2}{4}-\frac{2}{3}(r-h)\sqrt{h(2r-h)}-\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{r-h}{r}-\frac{r^2}{6}\arcsin\frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r}\right)H-$$

$$-\frac{H}{3r}(r-h)^3\ln\frac{r-h}{r+\sqrt{h(2r-h)}}.$$

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{h\to r}V_{ks}=\Big(\frac{\pi r^2}{4}-\frac{\pi r^2}{12}\Big)H=\frac{1}{6}\pi\,r^2\,H,$$

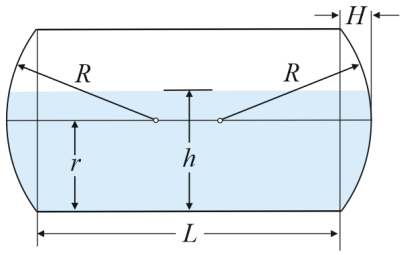
mis on pool vastava koonuse ruumalast.

Vastus: Funktsioon, mille väärtuseks on täitekõrgusele $h\leqslant 2\,r$ vastav ruumala on:

$$V_h(L,r,H,h)=\begin{cases}V_s(L,r,h)+2V_{ks}(H,r,h), & \text{kui } h<r,\\ \frac{1}{2}V_{\text{silinder}}+V_{\text{koonus}}, & \text{kui } h=r,\\ V_{\text{silinder}}+2V_{\text{koonus}}-V_s(L,r,h)-2V_{ks}(H,r,2r-h), & \text{kui } r<h<2r,\\ V_{\text{silinder}}+2V_{\text{koonus}} & \text{kui } h=2r\end{cases}$$

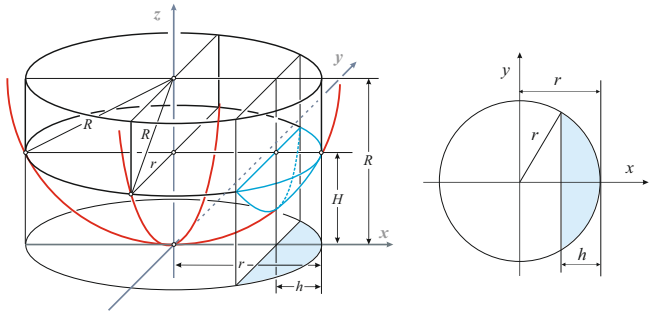
Siin $V_s(L,r,h)$ on silindrilise osa segmendi ruumala (vt ülesanne **1.67**).

Ül 1.69. Tankla kütusemahutiks on sfääriliste otstega pöördsilindr, mille telg on horisontaalne. Teades mahuti mõõtmeid, leida selles oleva vedeliku ruumala täitekõrguse h järgi.



Lahendus. Teeme ülesande kirjeldusele vastava joonise.
Valime koordinaadid nii, et mahuti otsaks oleva sfääri võrrand on

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$



Siit leiame alumise poolsfääri võrrandi

$$z = R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad \text{ja} \qquad H = R - \sqrt{R^2 - r^2}.$$

$$V_{\text{seg}} = 2\int_{r-h}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{R-\sqrt{R^2-r^2}} dz =$$

$$= 2\int_{r-h}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \Big(-\sqrt{R^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\Big) dy.$$

Leiame kõigepealt sisemise inetegraali dy järgi.

$$\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \Big(-\sqrt{R^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\Big) dy =$$

$$= \Big(-\sqrt{R^2 - r^2}\, y + \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{y}{2}\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\Big)\Big|_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{R^2-r^2}\,\sqrt{r^2-x^2} + \left(R^2-x^2\right)\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}}\right).$$

Seega, kera segmendi ruumala avaldub määratud integraalina

$$\begin{aligned} V_{\text{seg}} &= \int_{r-h}^{r}\left(-\sqrt{R^2-r^2}\,\sqrt{r^2-x^2} + \left(R^2-x^2\right)\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}}\right)dx = \\ &= -\sqrt{R^2-r^2}\int_{r-h}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx + R^2\int_{r-h}^{r}\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}}\,dx - \\ &\quad -\int_{r-h}^{r}x^2\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{R^2-r^2}\,I_1 + R^2 I_2 - I_3, \end{aligned} \tag{1.17}$$

Leiame igale liidetavale vastava määramata integraali. Seega

$$I_1 = \int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} + C, \tag{1.18}$$

(vt ülesanne **1.67**, valem **1.15**), silindriline mahuti.

Integraali I_2 leidmiseks kasutame kõigepealt ositi integreerimist

$$I_2 = \int\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = \arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} & dv = dx \\ du = \frac{-\sqrt{R^2-r^2}\;x\;dx}{\sqrt{r^2-x^2}(R^2-x^2)} & v = x \end{array}\right] =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} + \sqrt{R^2-r^2}\int\frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}dx =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} - \sqrt{R^2-r^2}\int\frac{R^2-x^2-R^2}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}dx =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} - \sqrt{R^2-r^2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} - R^2\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}\right) =$$

$$= x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} - \sqrt{R^2-r^2}\arcsin\frac{x}{r} + R^2\sqrt{R^2-r^2}\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}$$

Siin viimase integraali leidmiseks teeme muutujate vahetuse
$x = r\sin t, \quad dx = r\,\cos t\,dt$

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} = \int\frac{r\cos t\,dt}{r\cos t\,(R^2-r^2\sin^2 t)} = \int\frac{dt}{R^2-r^2\sin^2 t}.$$

Nüüd kasutame integraali (vt ülesanne **1.37**)

$$\int \frac{du}{a-b\sin^2 u} = \frac{1}{\sqrt{a(a-b)}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a}}\tan u\right) + C,$$

milles võtame $a = R^2$ ja $b = r^2$. Seega

$$\int \frac{dt}{R^2 - r^2\sin^2 t} = \frac{1}{R\sqrt{R^2-r^2}} \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\tan t\right)$$

Muutujate vahetusest leiame $\sin t = \frac{x}{r}$ ja $\cos t = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$, et

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} = \frac{1}{R\sqrt{R^2-r^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right).$$

Kokkuvõtteks saame teise integraali

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \\ &= x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} - \sqrt{R^2-r^2}\arcsin\frac{x}{r} + \\ &\quad + R^2\sqrt{R^2-r^2}\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} - \sqrt{R^2-r^2}\arcsin\frac{x}{r} + \\ &\quad + R^2\sqrt{R^2-r^2}\cdot\left(\frac{1}{R\sqrt{R^2-r^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\right), \end{aligned}$$

millest pärast lihtsustamist saame selle lõpliku kuju

$$\begin{aligned} I_2 = x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} &- \sqrt{R^2-r^2}\arcsin\frac{x}{r} + \\ &+ R\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Kolmanda integraali I_3 leidmiseks kasutame kõigepealt ositi integreerimise võtet

$$I_3 = \int x^2\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} & dv = x^2dx \\ du = \frac{-\sqrt{R^2-r^2}\;x\;dx}{\sqrt{r^2-x^2}(R^2-x^2)} & v = \frac{1}{3}x^3 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} + \frac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}\int \frac{x^4}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}dx.$$

Teisendame viimases avaldises olevat integraali

$$I = \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} = -\int \frac{R^4-x^4-R^4}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}dx =$$

$$= -\int \frac{(R^2-x^2)(R^2+x^2)-R^4}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}dx = -\int \frac{R^2+x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}dx + R^4\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} =$$

$$= -R^2\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}dx + R^4\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} =$$

$$= -R^2\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} + \int \frac{r^2-x^2-r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}dx + R^4\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} =$$

$$= -R^2\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} + \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx - r^2\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} + R^4\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)} =$$

$$= \int \sqrt{r^2-x^2}\,dx - (R^2+r^2)\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} + R^4\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}\,(R^2-x^2)}.$$

Varasemate tulemuste põhjal saame leida iga liidetava integraali eraldi

$$I = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} - (R^2+r^2)\arcsin\frac{x}{r} + \\ + R^4\frac{1}{R\sqrt{R^2-r^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right).$$

Seega kolmanda integraali lõplik kuju on

$$I_3 = \frac{1}{3}x^3\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} + \\ + \frac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} - \frac{1}{2}(2R^2+r^2)\arcsin\frac{x}{r}\right) + \\ + \frac{R^3}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) \qquad (1.20)$$

Leiame nüüd kera segmendi ruumala integraalis (1.17) olevad määratud integraalid.

Esimesele liidetavale (1.18) vastav määratud integraal on

$$\begin{aligned} I_1(h) &= \left(\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}\right)\Bigg|_{r-h}^{r} \\ &= \frac{1}{4}\left(\pi\, r^2 - 2(r-h)\sqrt{h(2r-h)} - 2r^2\arcsin\left(\frac{r-h}{r}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Teisele liidetavale (1.19) vastav määratud integraal on

$$I_2(h) = \left(x\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} - \sqrt{R^2-r^2}\arcsin\frac{x}{r} + R\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\right)\Bigg|_{r-h}^{r}.$$

Ülemise raja asendamiseks tuleb arvutada piirväärtus

$$\beta = \lim_{x\to r-} I_2(x) = -\frac{\pi}{2}\sqrt{R^2-r^2} + \frac{\pi}{2}R = \frac{\pi}{2}\left(R - \sqrt{R^2-r^2}\right).$$

Juhul kui täitekõrgus $h > 0$, siis alumise raja asendamiseks ei ole vaja kasutada piirväärtust

$$\begin{aligned} I_2(h) = {} & \frac{\pi}{2}\left(R - \sqrt{R^2-r^2}\right) + \sqrt{R^2-r^2}\arcsin\frac{r-h}{r} - \\ & - (r-h)\arcsin\sqrt{\frac{r^2-(r-h)^2}{R^2-(r-h)^2}} - R\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{r-h}{\sqrt{r^2-(r-h)^2}}\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Täitekõrguse $h = 0$ korral tuleb viimasest arvutada piirväärtus

$$\lim_{h\to 0+} I_2(h) = 0.$$

Kolmandale liidetavale (1.20) vastav määratud integraal on

$$\begin{aligned} I_3(h) = \frac{1}{3}\Bigg(x^3\arcsin\sqrt{\frac{r^2-x^2}{R^2-x^2}} + \sqrt{R^2-r^2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} - \frac{1}{2}(2R^2+r^2)\arcsin\frac{x}{r}\right) + \\ + R^3\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\Bigg)\Bigg|_{r-h}^{r}. \end{aligned}$$

Ülemise raja asendamiseks tuleb arvutada piirväärtus

$$\beta = \lim_{x\to r-} I_3(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{4}(2R^2+r^2)\sqrt{R^2-r^2} + \frac{\pi}{2}R^3\right).$$

Juhul kui täitekõrgus $h > 0$, siis alumise raja asendamiseks ei ole vaja kasutada

piirväärtust

$$I_3(h) = \frac{1}{3}\Bigg(\frac{\pi}{2}R^3 - \frac{\pi}{4}(2R^2+r^2)\sqrt{R^2-r^2} - \\ - (r-h)^3 \arcsin\sqrt{\frac{r^2-(r-h)^2}{R^2-(r-h)^2}} - R^3 \arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\,\frac{r-h}{\sqrt{r^2-(r-h)^2}}\right) - \\ - \sqrt{R^2-r^2}\left(\frac{r-h}{2}\sqrt{r^2-(r-h)^2} - \frac{1}{2}(2R^2+r^2)\arcsin\frac{r-h}{r}\right)\Bigg). \tag{1.23}$$

Täitekõrguse $h = 0$ korral tuleb viimasest arvutada piirväärtus

$$\lim_{h\to 0+} I_3(h) = 0.$$

Nüüd on leitud kõik kera segmendi ruumala integraalis (1.17) olevad määratud integraalid, seega

$$V_{\text{seg}}(h) = -\sqrt{R^2-r^2}\, I_1(h) + R^2\, I_2(h) - I_3(h).$$

Asendame viimasesse integraalid (1.21), (1.22) ja (1.23) ning lihtsustame. Seega täitekõrgusele h vastava kera segmendi osa ruumala arvutamiseks saame valemi

$$V_{\text{seg}}(R,r,h) = \frac{\pi}{3}R^3 - \frac{\pi}{6}(2R^2+r^2)\sqrt{R^2-r^2} + \frac{2}{3}\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{r^2-(r-h)^2}\,(r-h) + \\ + \frac{1}{3}(2R^2+r^2)\sqrt{R^2-r^2}\arcsin\left(\frac{r-h}{r}\right) - \\ - \frac{1}{3}\left(3R^2-(r-h)^2\right)(r-h)\arcsin\sqrt{\frac{r^2-(r-h)^2}{R^2-(r-h)^2}} - \\ - \frac{2}{3}R^3\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\,\frac{r-h}{\sqrt{r^2-(r-h)^2}}\right).$$

kus $R > r$ ja $0 < h < 2r$. Täis mahuti korral on kera segment täitunud, so $h = 2r$ ja kera segmendi ruumala leidmiseks tuleb arvutada piirväärtus

$$\lim_{h\to 2r} V_{\text{seg}}(R,r,h) = \frac{\pi}{3}\left(2R^3 - (2R^2+r^2)\sqrt{R^2-r^2}\right).$$

Mahuti silindrilise osa ruumala on leitav varasemast ülesandest (vt Ül **1.67**).

Ül 1.70. Teraskonstruktsiooni dekoratiivse komponendi jaoks lõigatakse välja õhuke plaat, mida kirjeldab järgmine piirkond

$$D: \quad -2 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 4 - x^2.$$

Plaadi tihedus sõltub kõrgusest: punktis (x, y) on tihedus

$$\rho(x, y) = ky,$$

kus $k > 0$ on konstant ning y on kaugus plaadi alumisest servast (x-teljest).

1. Leia plaadi mass.
2. Leia plaadi masskeskme $(\bar{x}, \bar{y})$.

Lahendus. Kui $\rho(x, y)$ on plaadi tihedus, siis plaadi mass on leitav järgnevalt:

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Plaadi masskeskme koordinaadid on

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \ \frac{M_x}{m} \right),$$

kus

$$M_x = \iint_D y\, \rho(x, y)\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint_D x\, \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Kuna plaadi kuju ja vastav tihedus on sümmeetrilised y-telje suhtes, siis on

$$\bar{x} = 0.$$

Seega piisab $\bar{y}$ leidmisest.

1. Plaadi massi arvutamine.

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dx\, dy = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{4-x^2} ky\, dy\, dx.$$

Arvutame sisemise integraali:

$$\int_0^{4-x^2} ky\, dy = k\, \frac{y^2}{2} \Big|_0^{4-x^2} = \frac{k}{2}(4 - x^2)^2.$$

Seega

$$m = \frac{k}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2\,dx = \frac{k}{2}\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,dx.$$

Integreerime:

$$\int(16-8x^2+x^4)\,dx = 16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

$$m = \frac{k}{2}\left(16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{2}.$$

Seega:

$$m = \frac{256k}{15}.$$

2. Plaadi masskeskme leidmine

$$M_x = \iint\limits_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} y(ky)\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} ky^2\,dy\,dx.$$

Sisemine integraal:

$$\int_0^{4-x^2} ky^2\,dy = k\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^{4-x^2} = \frac{k}{3}(4-x^2)^3.$$

Seega

$$M_x = \frac{k}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^3\,dx = \frac{k}{3}\int_{-2}^{2}(64-48x^2+12x^4-x^6)\,dx.$$

Saame:

$$\int(64-48x^2+12x^4-x^6)\,dx = 64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}.$$

$$M_x = \frac{k}{3}\left(64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{4096k}{105}.$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{4096k}{105}}{\frac{256k}{15}} = \frac{4096}{105}\cdot\frac{15}{256} = \frac{16}{7}.$$

Seega

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(0,\frac{16}{7}\right).$$

Masskese asub y-teljel umbes kõrgusel $y \approx 2{,}29$ m plaadi alumisest servast, see on punkt, kuhu plaati toetades saavutaksime tasakaalu.

Vastus: **1.** Plaadi mass $m = \frac{256k}{15}$. **2.** Maskeskme koodrinaadid $\left(0,\frac{16}{7}\right)$.

1.9. Joon- ja pindintegraalid

Ül 1.71. Projekteeritav kütusemahuti on pöördsilinder, mille raadius on r. Mahuti katuseks planeeritakse pöördparaboloidi

$$x^2 + y^2 = 2rz.$$

Leida kütusemahuti katuse pindala.

Lahendus. Võrrandiga $z = z(x, y)$ esitatud pinnatüki Σ pindala arvutamiseks saab kasutada esimest liiki pindintegraali

$$S_\Sigma = \iint_\Sigma dS = \iint_{\mathrm{pr}_{xy}\Sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

kus $\mathrm{pr}_{xy}\Sigma$ on pinnatüki projektsioon $xy-$tasandil.

Pöördparaboloidi võrrandist leiame

$$z = \frac{x^2}{2r} + \frac{y^2}{2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

Leime nüüd vajaliku pindintegraali

$$S_\Sigma = \iint_\Sigma dS = \iint_{\mathrm{pr}_{xy}\Sigma} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2}\, dx\, dy = \frac{1}{r} \iint_{\mathrm{pr}_{xy}\Sigma} \sqrt{r^2 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Pinnatüki projektsioon $\mathrm{pr}_{xy}\Sigma$ $xy-$tasandil on ring

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2,$$

ning sellepärast mõistlik kasutada polaarkoordinaate

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Polaarkoornaaatide korral on pinnatükk Σ määratud võrratustega $0 \leqslant \rho \leqslant r$ ja $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Seega

$$S_\Sigma = \frac{1}{r} \iint_{\mathrm{pr}_{xy}\Sigma} \sqrt{r^2 + x^2 + y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho\sqrt{r^2 + \rho^2}\, d\rho = \frac{1}{2r} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \sqrt{r^2 + \rho^2}\, d(r^2 + \rho^2) =$$

$$= \frac{1}{2r}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(r^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r d\varphi = \frac{1}{3r}\int_0^{2\pi}\Big((2r^2)^{\frac{3}{2}} - (r^2)^{\frac{3}{2}}\Big)d\varphi =$$
$$= \frac{1}{3r}\int_0^{2\pi} r^3\Big(2\sqrt{2}-1\Big)d\varphi = \frac{2\pi\, r^2}{3}\Big(2\sqrt{2}-1\Big).$$

Vastus: Katuse pindala $S_\Sigma = \dfrac{2\pi\, r^2}{3}\Big(2\sqrt{2}-1\Big)$.

Ül 1.72. Projekteeritakse elliptilise ristlõikega silindrilist mahutit, mille võrrand on
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
Mahuti plaanitakse ülalt katta elliptilise paraboloidiga
$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z.$$
Leida mahuti katuse pindala.

Lahendus. Võrrandiga $z=z(x,y)$ esitatud pinnatüki Σ pindala arvutamiseks saab kasutada esimest liiki pindintegraali
$$S_\Sigma = \iint_\Sigma dS = \iint_{\mathrm{pr}_{xy}\Sigma} \sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dx\,dy,$$
kus $\mathrm{pr}_{xy}\Sigma$ on pinnatüki projektsioon $xy-$tasandil.
Elliptilise paraboloidi võrrandist leiame
$$z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{b}.$$
Pindalaelement on
$$dS=\sqrt{1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$
Pinnatüki projektsioon $\mathrm{pr}_{xy}\Sigma$ $xy-$tasandil ehk silindri ristlõige on ellipsi sisepiirkond, so määratud võrratusega
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1.$$
ning sellepärast mõistlik kasutada elliptilisi koordinaate (vt ülesanne 1.66)
$$\begin{cases} x = a\,\rho\cos\varphi, \\ y = b\,\rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \text{kus } 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi,$$

Üleminekuvalemisest saame, et

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \rho\cos\varphi, \\ \dfrac{y}{b} = \rho\sin\varphi, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \rho^2\cos^2\varphi, \\ \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \rho^2\sin^2\varphi, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2.$$

Selleks, et integraalis teostada üleminek ellipitlistele koordinaatidele, tuleb arvutada Jakobiaan:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = a\,b\,\rho.$$

Järelikult pindalaelement elliptilistes koordinaatides on

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \sqrt{1+\rho^2}\,a\,b\,\rho\;d\rho\,d\varphi.$$

Leiame pinnatüki pindala

$$S_\Sigma = \iint_\Sigma dS = a\,b\iint_{\mathrm{pr}_{\rho\varphi}\Sigma} \rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho\,d\varphi = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{a\,b}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2\rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho = \frac{a\,b}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\,d\big(1+\rho^2\big) =$$

$$= \frac{a\,b}{3}\int_0^{2\pi} \big(1+\rho^2\big)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{a\,b}{3}\int_0^{2\pi}\Big((1+1)^{\frac{3}{2}} - 1\Big)d\varphi = \frac{2\pi\,a\,b}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big).$$

Võrdle leitud pindala arvutamise reeglit ülesandes **1.71** leitud reegliga.

Vastus: Katuse pindala $S_\Sigma = \dfrac{2\pi\,a\,b}{3}\big(2\sqrt{2}-1\big)$.

Ül 1.73. Olgu xy-tasandil olev kaar jaotatud n osakaareks pikkusega l_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Teades nende osakaarte pinnakeskmete koordinaate $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, siis kaare pinnakeskme koordinaadid $\bar{x}$, $\bar{y}$ on osakaarte pinnakeskmete koordinaatide kaalutud keskmine, kus kaaludeks on osakaarte pikkused l_i

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} l_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i l_i}{l}, \quad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i l_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} l_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i l_i}{l},$$

kus l on kaare kogupikkus.

Kui kaar jagada lõpmata väikesteks osakaarteks, siis piirprotsessil $n \to \infty$ asenduvad summad joonintegraalidega

$$\bar{x} = \frac{\int_l x dl}{\int_l dl} = \frac{\int_l x dl}{l}, \quad \bar{y} = \frac{\int_l y dl}{\int_l dl} = \frac{\int_l y dl}{l},$$

kus intgreeritakse üle kogu kaare pikkuse l. Sümmeetrilise kaare pinnakese asub selle sümmeetriateljel.

Leida poolringjoone pinnakese kui ringjoone raadius on r.

Lahendus. Kasutame polaarkordinaate selliselt, et poolusesks on ringjoone keskpunkt ja poolring toetub polaarteljele. Otsitav pinnakese on poolringi sümmeetriateljel. Poolringi pikkus

$$l = \int_l dl = \int_0^{\pi} r d\varphi = r\,\varphi\Big|_0^{\pi} = \pi\, r.$$

Leiame teise integraali

$$\int_l y dl = \int_0^{\pi} r \sin\varphi \cdot r d\varphi = r^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = -r^2 \sin\varphi\Big|_0^{\pi} = 2r^2,$$

seega

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{2r^2}{\pi\, r} = \frac{2r}{\pi}.$$

Vastus: Poolringi pinnakese on punktis $M\left(0,\, \frac{2r}{\pi}\right)$.

Ül 1.74. Olgu xy-tasandil olev kujund jaotatud n osakujundiks pindalaga S_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Teades nende osakujundite pinnakeskmete koordinaate $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, siis kujundi pinnakeskme koordinaadid $\bar{x}$, $\bar{y}$ on osakujundite pinnakeskmete koordinaatide kaalutud keskmine, kus kaaludeks on osakujundite pindalad S_i

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} S_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i S_i}{S}, \quad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} S_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i S_i}{S},$$

kus S on kujundi pindala. Kui osakujund k osutub väljalõikeks, siis selle pindala S_k loetakse nende valemite lugejas ja nimetajas negatiivseks, so $S_k < 0$.

Kujundi jaotamisel lõpmata väikesteks osakujunditeks asenduvad piirprotsessil $n \to \infty$ summad pindintegraalidega

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_S x\,dS}{\iint\limits_S dS} = \frac{\iint\limits_S x\,dS}{S}, \quad \bar{y} = \frac{\iint\limits_S y\,dS}{\iint\limits_S dS} = \frac{\iint\limits_S y\,dS}{S}, \tag{1.24}$$

kus intgreeritakse üle kogu kujundi pindala S. Sümmeetrilise kujundi pinnakese asub selle kujundi sümmeetriateljel.

a) Leida kolmnurga pinnakeskme kõrgus kui kolmnurga alus on b ja kõrgus h.

b) Leida ringi sektori pinnakeskme asukoht kui sektori sisenurk on 2α ja raadius r.

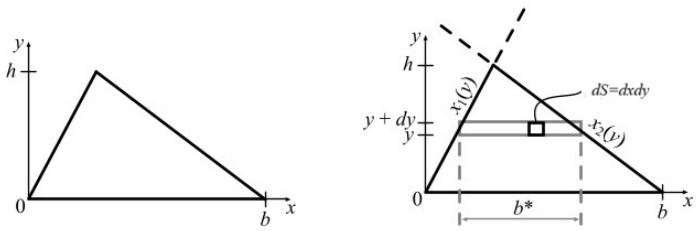
c) Leida veerand- ja poolringi pinnakeskme asukoht.

Lahendus. **a)** Valime ristkoordinaadid nii, et x-teljeks on kolmnurga alus ja koordinaatide alguspunkt asub aluse ühes tipus (vt joonis 1.4).

Selliselt valitud koordinaatide korrale on pinnakeskme kõrguseks selle teine koordinaat, seega valemitest (1.24) põhjal

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_S y\,dS}{S},$$

kus S on kolmnurga pindala.



Joonis 1.4: Kolmnurk koordinaadistikus

Arvutame kolmnurga pindala:

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_S dx\,dy = \int\limits_0^h dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx = \int\limits_0^h \big(x_2(y) - x_1(y)\big)dy,$$

kus $x_1(y)$ ja $x_2(y)$ on lineaarsed funktsioonid ja nende vahe $x_2(y) - x_1(y)$ on samuti lineaarne funktsioon, mis geomeetriliselt kujutab endast kolmnurga laiust b^* jooksval kõrgusel y.

Määrame järgnevalt lineaarse funktsiooni $b^*(y) = c\,y + d$ kordajad c ja d:

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Rightarrow \quad b^*(0) = c \cdot 0 + d = b \quad \Rightarrow \quad d = b \quad , \\ y = h \quad &\Rightarrow \quad b^*(h) = c \cdot h + d = b \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{b}{h}, \end{aligned}$$

millest

$$x_2(y) - x_1(y) = -\frac{b}{h}y + b.$$

Kolmnurga pindala

$$S = \int\limits_0^h \Big(-\frac{b}{h}y + b\Big)dy = \Big(-\frac{b}{2h}y^2 + by\Big)\Big|_0^h = -\frac{b}{2h}h^2 + bh = \frac{b\,h}{2}.$$

Pinnakeskeme kõrguse $\bar{y}$ leidmiseks tuleb arvutada integraal

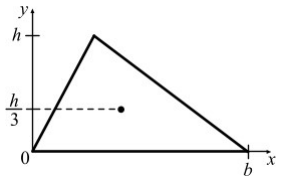
$$\bar{y} = \frac{\int_S y dS}{S}.$$

Selle murru lugejas olev pindintegraal on

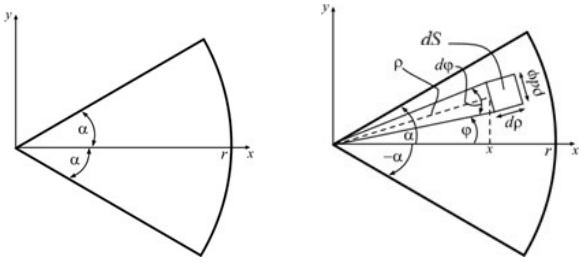
$$\iint\limits_S y dS = \iint\limits_S y\,dxdy = \int\limits_0^h y dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx = \int\limits_0^h y\big(x_2(y) - x_1(y)\big)dy =$$

$$= \int_0^h y\, b^*\, dy = \int_0^h y\Big(-\frac{b}{h}y + b\Big)dy = \Big(-\frac{b}{3h}y^3 + \frac{b}{2}y^2\Big)\Big|_0^h = -\frac{b}{3h}h^3 + \frac{b}{2}h^2 = \frac{b\,h^2}{6}.$$

Seega pinnakeskme kõrgus $\bar{y} = \frac{b\,h^2}{6} \cdot \frac{2}{b\,h} = \frac{h}{3}$.



b) Valime ristkoordinaadid nii, et x-teljeks on sektori sümmeetriatelg ja koordinaatide alguspunkt asub sektori tipus (vt joonis 1.5).



Joonis 1.5: Sektor koordinaadistikus

Sektori pinnakeskme koordinaatide leidmiseks kasutame polaarkoordinaate ρ ja φ. Leiame kõigepealt sektori pindala

$$S = \iint_S dS = \iint_S \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^r \rho\, d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = 2\alpha \int_0^r \rho\, d\rho = \alpha\, \rho^2\Big|_0^r = \alpha\, r^2.$$

Arvutame staatilise momendi y-telje suhtes viies integrandi üle polaarkoordinaatidele $x dS = \rho \cos\varphi\, \rho\, d\rho\, d\varphi$

$$\iint_S x\, dS = \int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^r \rho^2 d\rho\big(\sin\varphi\big)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2\sin\alpha \int_0^r \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{2\sin\alpha}{3}\big(\rho^3\big)\Big|_0^r = \frac{2r^3\sin\alpha}{3}.$$

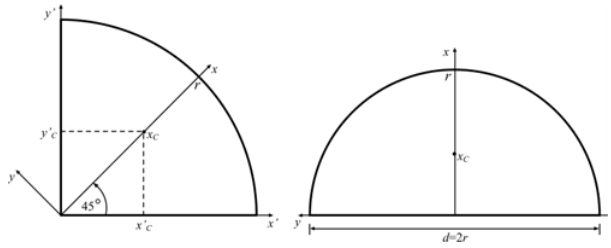
Valemitest (1.24) järeldub, et

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_S x\, dS}{S} = \frac{2r^3\sin\alpha}{3 \cdot \alpha r^2},$$

millest

$$\bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}. \tag{1.25}$$

c) Veerand- ja poolpooling on sektorid vastavalt nurkadega $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ja $\alpha = \frac{\pi}{2}$.



Joonis 1.6: Veerand- ja poolring koordinaadistikus

Valime veerandringi korral polaarteljeks esimese veerandi nurgapoolitaja, siis valemi **(1.25)** põhjal saame, et polaarteljel (so sektori sümmteetriateljel) asuva pinnakeskme kaugus koordinaatide alguspunktist ehk poolusest on

$$\bar{\rho} = \frac{2r \sin \frac{\pi}{4}}{3} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{2r}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi}.$$

Teostame ülemineku ristkoordinaatidele

$$\bar{x} = \bar{\rho} \cos \varphi = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4r}{3\pi},$$

$$\bar{y} = \bar{\rho} \sin \varphi = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}r}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4r}{3\pi}.$$

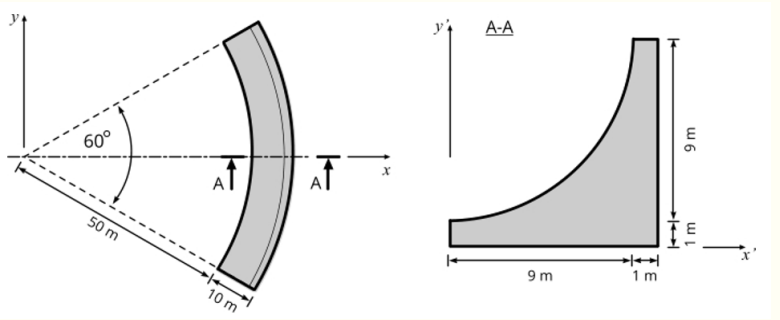
Valime poolringi korral polaarteljeks y-telje, siis valemi **(1.25)** põhjal saame, et polaarteljel (so sektori sümmteetriateljel) asuva pinnakeskme kaugus koordinaatide alguspunktist ehk poolusest (vt ka ülesannet 1.48) on

$$\bar{\rho} = \bar{y} = \frac{2r \sin \frac{\pi}{2}}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Poolring koosneb kahest veerandringist ja pinnakese on diameerist mõõtes kummalgil kujundil samal kõrgusel.

Vastus: a) pinnakeskme kõrgus on $\bar{y} = \dfrac{h}{3}$;
b) sektori pinnakese sümmeetriateljel on $\bar{x} = \dfrac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$;
c) veerand- ja poolringi pinnakese on vastavalt punktides $\left(\dfrac{4r}{3\pi}, \dfrac{4r}{3\pi}\right)$ ja $\left(0, \dfrac{4r}{3\pi}\right)$.

Ül 1.75. Arvuutada joonisel kujutatud betoonist tammi mass võttes betooni tiheduseks $\rho = 2300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



Lahendus. Selle ülesande lahendamiseks kasutame Pappus-Guldini teist teoreemi (PGIIT): *pöördkeha ruumala on võrdne teda genereerinud pinna pindala ja selle pinna pinnakeskme poolt joonistatud ringjoone pikkuse korrutisega.*

$$V = \iint_V dV = \iint_S 2\pi\, x\, dS = 2\pi \iint_S x\, dS = 2\pi\, \bar{x}\, S.$$

Seega PGIIT järgi tuleb arvutada suurus $\bar{x} \cdot S = (50 + \bar{x}') \cdot A$.

Tammi ristlõige koosneb 10 m × 10 m mõõtmetega ruudust ja veerandringi kujulisest väljalõikest, mille keskpunkt on joonisel (vt lõige A-A) ruudu ülemises vasakus nurgas ning raadius 9 m.

Kuna tammi kaarele vastav nurk on 60°, siis selle ruumala on 60°/360° ehk $\frac{1}{6}$ kogu pöördkeha ruumalast.

$$\bar{x} \cdot S = (50 + 5) \cdot 10^2 - \Big(50 + \frac{4 \cdot 9}{3\pi}\Big) \cdot \frac{\pi \cdot 9^2}{4} \approx 2076.14\,\text{m}^3,$$

$$m = \rho\, V\, \frac{60}{360} = \rho \cdot 2\pi \cdot \bar{x} \cdot S \cdot \frac{1}{6} = 2300 \cdot 2\pi \cdot 2076.14 \cdot \frac{1}{6} \approx 5000.5\,\text{t}.$$

Vastus: Tamm kaalub 5000.5 tonni.

Ül 1.76. Homogeense, st konstantse massitihedusega, keha masskeskme koordinaatide arvutamine langeb kokku keha ruumala- ehk mahukeskme arvutamisega.
Kehaga seotud koordinaatide süsteemis on selle mahukeskme koordinaadid $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ arvutatavad kui kaalutud aritmeetilised keskmised osakujundite mahukeskmete koordinaatidest $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$, kus kaaludeks on osakujundite ruumalad V_i:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i V_i}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} S_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i S_i}{S}, \quad \bar{z} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{z}_i V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{z}_i V_i}{V},$$

siin V on keha ruumala. Kui osakujund k osutub väljalõikeks, siis selle ruumala V_k loetakse nende valemite lugejas ja nimetajas negatiivseks, so $V_k < 0$.

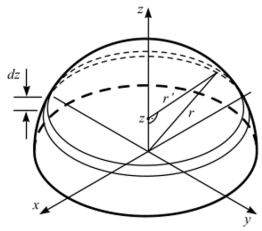
Keha jaotamisel lõpmata väikesteks osakujunditeks asenduvad piirprotsessil $n \to \infty$ summad integraalidega

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x dV}{\iiint\limits_V dV} = \frac{\iiint\limits_V x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y dV}{\iiint\limits_V dV} = \frac{\iiint\limits_V y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z dV}{\iiint\limits_V dV} = \frac{\iiint\limits_V z dV}{V},$$

kus integreeritakse üle kogu keha ruumala V. Sümmeetrilise keha mahukese asub selle keha sümmeetriateljel.

Leida poolkera mahukeskme asukoht.

Lahendus. Olgu poolkera raadius R ja seome sellega koodinaadistiku selliselt, et xy-tasand on poolkera põhjaks ning z-telg on poolkera sümmeetriateljeks.



Järelikult mahukese jääb z-teljele ja selle esimesed kaks koordinaati on

$$\bar{x} = \bar{y} = 0.$$

Tuleb määrata mahukeskme koordinaat z-teljel

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_V z dV.$$

Selleks leiame kõigepealt integraali

$$\iiint_V z dV = \int_0^R \pi\, r^2\, z\, dz = \pi \int_0^R z(R^2 - z^2) dz = \pi \Big(\frac{R^2}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \Big) \Big|_0^R = \frac{\pi\, R^4}{4}.$$

Poolkera ruumala

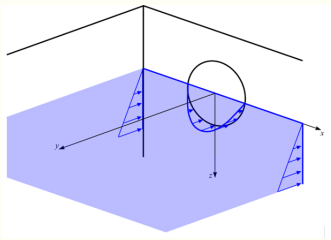
$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\,\pi\, R^3}{3} = \frac{4\,\pi\, R^3}{6}.$$

millest saame, et

$$\bar{z} = \frac{\pi\, R^4}{4} \cdot \frac{6}{4\pi\, R^3} = \frac{3R}{8} \approx 0,375R.$$

Vastus: Poolkera mahukeskme koordinaadid on $\Big(0, 0, \frac{3R}{8}\Big)$.

Ül 1.77. Vedeliku hüdrostaatiline surve on jõuväli, mis kasvab lineaarselt vedelikusamba sügavusega ja on joonisel näidatud teljestikus arvutatav valemiga $p = \varrho\, g\, z$ [Pa] , kus ϱ on vedeliku tihedus, g raskuskiirendus ja z koordinaat mõõdab sügavust. Vedelikus mõjub vedeliku hüdrostaatiline surve kõigis suundades ühtemoodi, kokkupuutes kehadega aga alati risti keha pinna normaaliga, näiteks risti anuma seintega.



Joonisel kujutatud veehoidla seinas on ringikujuline suletud luuk ja veetase ulatub täpselt poole luugi kõrguseni.

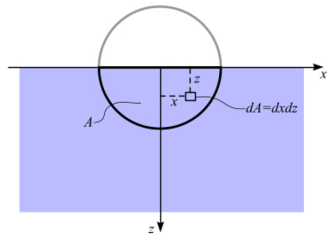
a) Leida jõu avaldis, millega vesi koormab luuki raadiusega r.

b) Arvutada luugile mõjuv jõud, kui vedelikuks on vesi $\varrho = 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ja raadius $r = 2\,\mathrm{m}$.

Lahendus. **a)** Arvutame luugile mõjuva summaarse jõu ehk jõuvälja resultandi

$$R = \iint_A p\, dA,$$

kus A on vee survele allutatud luugiosa pindala.



Arvutame resultandi

$$R = \iint_A p\,dA = \iint_A \varrho\, g\, z\, dA = \varrho\, g \iint_A z\, dA =$$
$$= \varrho\, g \int_0^r dz \int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-z^2}} dx = 2\varrho\, g \int_0^r z\sqrt{r^2-z^2}dz.$$

Teeme viimases integraalis muutujate vahetuse

$$u = r^2 - z^2, \quad du = 2zdz,$$

millest pärast integreerimispiirkonna ümberarutamist saame

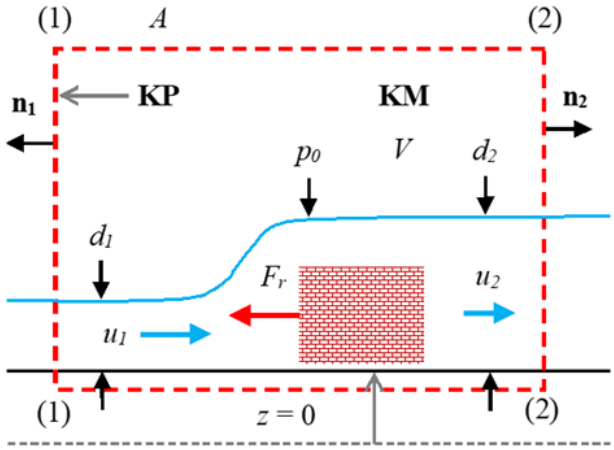
$$R = -\frac{2\varrho\, g}{2} \int_{r^2}^0 \sqrt{u}\, du = -\varrho\, g\, \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}\Big|_{r^2}^0 = -\frac{2\varrho\, g}{3}\left(0 - (r^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2\varrho\, g\, r^3}{3}. \qquad (1.26)$$

b) Luugile mõjuva jõu arvutamiseks kasutame valemit (1.26):

$$R = \frac{2}{3} \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot 2^3 = 53320\,\mathrm{N} = 52,32\,\mathrm{kN}.$$

Vastus: a) $R = \frac{2}{3}\varrho\, g\, r^3$; b) $R = 52,32\,\mathrm{kN}$.

Ül 1.78. Laias betoonist avasängis toimub kiirevooluline veevool, mida rahustatakse voolurahustusploki abil (vt joonis 1.7). Sängi laius on piisavalt suur, et voolu saab käsitleda ühemõõtmelisena. Voolamine on statsionaarne ja horisontaalne. Plokk põhjustab veetaseme tõusu: enne plokki on veesügavus $d_1 = 0.5$ m ja pärast plokki $d_1 = 1.2$ m. Antud on vooluhulk sängi laiuse kohta ehk erivooluhulk $q = 8.33$ m^2/s. Arvuta, kui suur on voolu poolt tekitatud reaktsioonijõud ploki laiusühiku kohta. Vee tihedus on $\rho = 1000$ kg/m^3 ja raskuskiirendus $g = 9.81$ m/s^2.



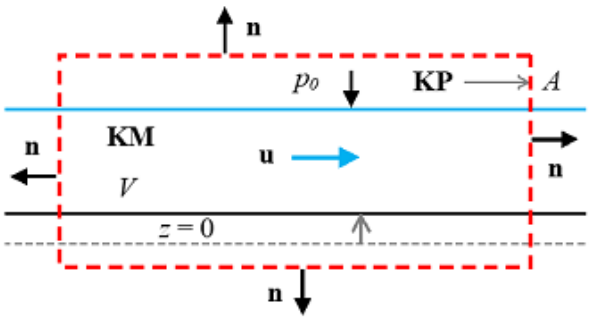
Joonis 1.7: Kiirevoolulise avasängi aluspõhja paigutatud voolurahustusplokk.

Lahendus. Ülesande lahendus põhineb liikumishulga jäävuse seadusel, mille üldine esitus fikseeritud kontrollmahule (vt joonis **1.8**: Voolamine läbi fikseeritud kontrollmahu (KM), mida sulgeb kontrollpind(KP)) on järgmine:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\mathbf{u}dV + \int_S \rho\,\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dA = \sum \mathbf{F}_v, \tag{1.27}$$

kus V on kontrollmahu ruumala, S on kontrollpind (kontrollmahu suletud pind), $\mathbf{u}$ on voolukiirus, $\mathbf{n}$ on kontrollpinna normaalvektor ja $\mathbf{F}_v$ on kõik välisjõud (sh rõhujõud, takistusjõud jne).
Võrrandit (1.27) saab lihtsustada. Kuna vool on statsionaarne, siis voolamine ei sõltu ajast ja seega

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\mathbf{u}dV = 0.$$



Joonis 1.8: Voolamine läbi fikseeritud kontrollmahu, milles sulgeb kontrollpind.

Vool on horisontaalne ja ühesuunaline, võime kirjutada

$$\int_S \rho\,\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dA = \int_S \rho\,u^2 dA,$$

kus u on suhteline voolukiirus piki kontrollmahtu. Rõhu kontrollpinnal annab vedeliku hüdrostaatiline rõhk, mis on seotud vedeliku sügavusega

$$p = \rho\,g\,d,$$

kus d on sügavus vees.
Valime kontrollmahu, mis hõlmab sängi ristlõike enne plokki (1) ja pärast plokki (2) (vt joonis 1.7). Ülemine ja alumine pind ei panusta liikumishulka horisontaalsuunas saame jõudude tasakaaluvõrrandiks

$$\rho A_2 u_2^2 - \rho A_1 u_1^2 + p_2 A_2 - p_1 A_1 = F_r,$$

kus $A_i = bh_i$ on ristlõike pindala, $v_i = q/h_i$ on voolu kiirus, $p_i = \rho g h_i/2$ on hüdrostaatiline rõhk. Jagades kogu avaldise sängi laiusega b, saame reaktsioonijõu laiusühiku kohta

$$f_r = \frac{F_r}{b} = \rho q^2(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}) + \frac{1}{2}\rho g(d_2^2 - d_1^2).$$

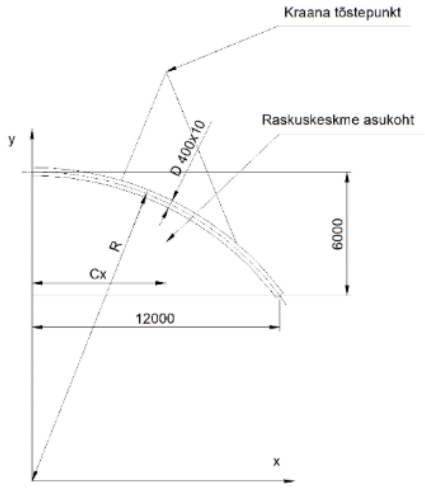
Kasutades lähteandmeid, saame

$$f_r = 1000 \cdot 8.33^2 \cdot (\frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{0.5^2}) + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 9.81 \cdot (1.2^2 - 0.5^2) = -71500\,N/m.$$

Vastus: Voolu tekitatud reaktsioonijõud ploki laiusühiku kohta on $f_r = -71500\,N/m$.

Ül 1.79. Silla element, mis on valmistatud painutatud terastorus välisläbimõõduga 400 mm ja seinapaksusega 10 mm on vaja kraanaga paika tõsta. Sillaelemendi kõrgus on 6 m ja pikkus 12 m. Sillaelemendi painderaadius on R ja vasakpoolne toru ots on risti y-teljega.

Selleks, et element püsiks tõstmise ajal samas asendis, peab kraana tõstepunkt asuma samal joonel raskuskeskme asukohaga. Leia integreerimise teel toru horisontaalne raskuskese (vt joonis 1.9).



Joonis 1.9: Silla element.

Lahendus. Kuna toru kesktelge saab kirjeldada kaare abil, siis määrame esmalt kaare raadiuse ja kaare parempoolset alguspunkti kirjeldava nurga α (vt joonis 1.10).

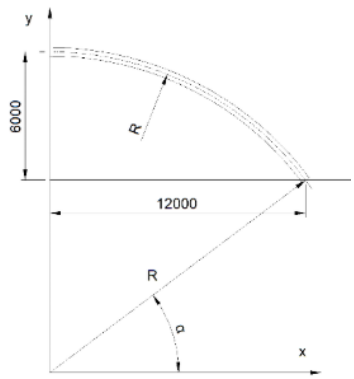
Kirjutame välja seosed raadiuse R, nurga α ja kaare peamõõtmete vahel

$$R - R\sin\alpha = 6 \quad \text{ja} \quad R\cos\alpha = 12.$$

Moodustame nendest võrranditest süsteemi ja lahendame selle. Asendame teise võrrandi esimesse ja leiame kaare raadiuse R ning nurga α.

$$\frac{12}{\cos\alpha}\big(1-\sin\alpha\big) = 6 \quad \Rightarrow \quad 2(1-\sin\alpha) = \cos\alpha$$

$$2(1-\sin\alpha) = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad 4 - 8\sin\alpha + 4\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$



Joonis 1.10: Silla elemendiga seotud nurk.

Seega nurga α siinuse määramiseks saame ruutvõrrandi

$$5\sin^2\alpha - 8\sin\alpha + 3 = 0,$$

millest

$$\sin\alpha = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 5\cdot 3}}{2\cdot 5} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \\ \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right). \end{array}$$

Meile sobib nurk α_2 ja nüüd saame leida otsitava raadiuse

$$R = \frac{6}{1-\sin\alpha} = \frac{6}{1-\frac{3}{5}} = 15.$$

Leiame elemendi x-telje suunalise raskuskeskme kasutades integreerimist. Oletame, et materjali tihedus on konstantne

$$C_x = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}.$$

Lähme ruumintegraali pealt üle joonintegraalile

$$dV = A\cdot ds,$$

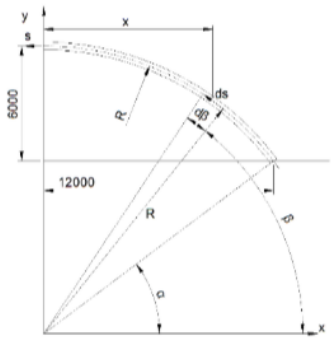
kus A toru ristlõike pindala. Siis

$$C_x = \frac{\int_s xAds}{\int_s Ads} \quad \Rightarrow \quad C_x = \frac{\int_s xds}{\int_s ds},$$

sest siin ristlõike pindala taandub.

Teeme veelkord koordinaatide teisenduse ja läheme üle polaarkoorinaatidele

$$ds = R\cdot d\beta \qquad \text{ja} \qquad x = R\cdot\cos\beta.$$



Nüüd saame, et x-telje suunaline raskuskeskme koordinaat avaldub kujul

$$C_x = \frac{\int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} R\cos\beta \cdot R\,d\beta}{\int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} R\,d\beta} = \frac{R\int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\,d\beta}{\int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} d\beta}.$$

Leiame murru lugejas ja nimetajas olevad integraalid eraldi:

$$\int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\,d\beta = \sin\beta\Big|_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\alpha_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

$$\int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} d\beta = \beta\Big|_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

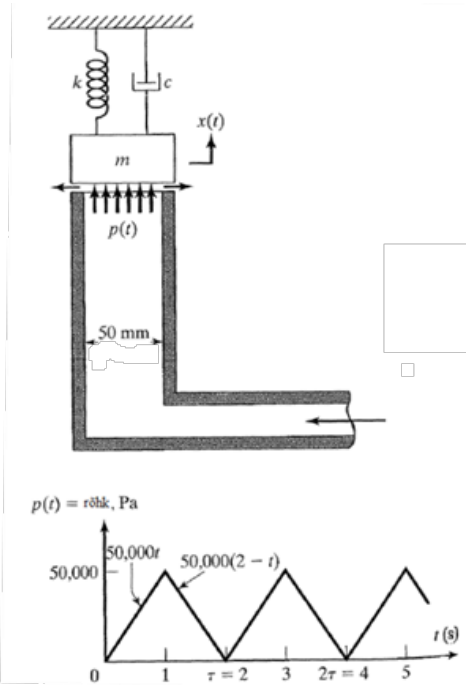
Järelikult raadiuse $R = 15$ korral

$$C_x = 15 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{6}{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 6,47\,\text{m}.$$

Vastus: Kraana tõstepunkt peab olema sillakaare vasakust servast $6,47$ m kaugusel.

1.10. Fourier asjad

Ül 1.80. Hüdraulilises juhtimissüsteemis kasutatavat ventiili ja selle klappi võib modelleerida sumbuva vedru-massi süsteemina. Lisaks vedrujõule ja summutusjõule mõjub ventiilile ka vedeliku rõhujõud, mis muutub vastavalt ventiili avanemis- või sulgumisastmele. Esita klapile mõjuv rõhk Fourier' reana, kui kambri rõhk $p(t)$ muutub joonisel 1.11 näidatud viisil.



Joonis 1.11: Hüdrauliline süsteem ja klapile mõjuv rõhk.

Lahendus. Rõhk avaldub kujul

$$p(t) = \begin{cases} 50000t, 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ 50000(2-t), \dfrac{T}{2} \leq t \leq T, \end{cases}$$

kus T on periood. Võnkumise sagedus $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s. Rõhk Fourier' reana avaldub kujul

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \Sigma_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega t)$$

ja kordajad leiame avaldistega

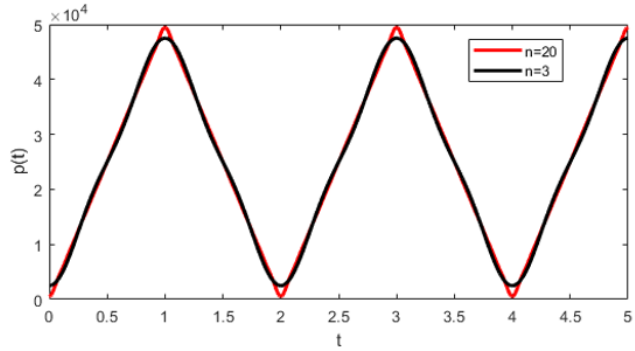
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)dt = 50000tdt + \int_1^2 50000(2-t)dt = 50000,$$

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos(j\omega t)dt = \\ &= 50000\Big(\int_0^1 t\,\cos(j\omega t)dt + \int_1^2 (2-t)\cos(j\omega t)dt\Big) = \\ &= 50000 \cdot \frac{2(-1)^j - 2}{(j\pi)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\sin(j\omega t)dt = \\ &= 50000\Big(\int_0^1 t\,\sin(j\omega t)dt + \int_1^2 (2-t)\sin(j\omega t)dt\Big) = \\ &= 50000 \cdot \frac{2\sin(j\pi) - \sin(2j\pi)}{(j\pi)^2} = 0. \end{aligned}$$

Seega funktsiooni $p(t)$ Fourier' rida on

$$p(t) = 25000 - \frac{2 \cdot 10^5}{\pi^2}\cos(\omega t) - \frac{2 \cdot 10^5}{9\pi^2}\cos(3\omega t) - \ldots$$



Rõhk erineva realiikmete arvu n korral Fourier' rea summana.

Vastus: Klapile mõjuv rõhk $p(t) = 25000 - \frac{2\cdot 10^5}{\pi^2}\cos(\omega t) - \frac{2\cdot 10^5}{9\pi^2}\cos(3\omega t) - \ldots$.

1.11. Harilikud diferentsiaalvõrrandid

Ül 1.81. Reovee keemilise või biokeemilise puhastamise käigus väheneb reaktandi (saasteaine) kontsentratsioon kiirusega, mis on proportsionaalne kontsentratsiooni teatava astmega. Täpsemalt kehtib järgmine diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{dA}{dt} = -kA^{\alpha}, \tag{1.28}$$

kus $A \geq 0$ reaktandi kontsentratsioon, $\alpha > 0$ on reatsiooni aste ja $k > 0$ on reaktsiooni iseloomustav kordaja. Leida diferentsiaalvõrrandi (1.28) erilahend, mis vastab algtingimusele

$$A(0) = A_0, \tag{1.29}$$

kus $A_0 > 0$. Milliste α väärtuste korral jõuab kontsentratsioon lõpliku aja jooksul nulli?

Lahendus. Eraldame võrrandis (1.28) muutujad ja integreerime:

$$\frac{dA}{A^{\alpha}} = -kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dA}{A^{\alpha}} = -kt + C, \;\; C - \text{suvaline konstant.}$$

Vaatleme eraldi kolme juhtu: $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha = 1$ ja $\alpha > 1$.

1) Kui $0 \leq \alpha < 1$, siis saame $\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -kt + C$. Algtingimuse (1.29) põhjal $C = \frac{A_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Seega

$$\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -kt + \frac{A_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad A = \Big(A_0 - (1-\alpha)kt\Big)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Kontsentratsioon A saavutab nullväärtuse ajahetkel $t = \frac{A_0}{(1-\alpha)k}$.

2) Kui $\alpha = 1$, siis saame $\ln A = -kt + C$. Algtingimuse põhjal $C = \ln A_0$. Seega

$$\ln A = -kt + \ln A_0 \quad \Rightarrow \quad \ln A - \ln A_0 = -kt \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{A}{A_0} = -kt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{A}{A_0} = e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad A = A_0 e^{-kt}.$$

Kontsentratsioon A jääb nullist erinevaks kõigi $t > 0$ korral, kuid läheneb eksponentsiaalselt nullile protsessis $t \to \infty$.

3) Kui $\alpha > 1$, siis nii nagu juhul **1)** saame $\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -kt + C$. Seekord on suurus $1 - \alpha$ negatiivne. Teisendame saadud võrdust nii, et sellesse jäävad positiivne kordaja ja A

positiivne aste:

$$\frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} = kt - C.$$

Algtingimuse (1.29) põhjal $C = -\frac{1}{(\alpha-1)A_0^{\alpha-1}}$. Seega

$$\frac{1}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} = kt + \frac{1}{(\alpha-1)A_0^{\alpha-1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A^{\alpha-1}} = (\alpha-1)kt + \frac{1}{A_0^{\alpha-1}} \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{\left[(\alpha-1)kt + \frac{1}{A_0^{\alpha-1}}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

Kontsentratsioon A jääb nullist erinevaks kõigi $t > 0$ korral ja läheneb nullile protsessis $t \to \infty$ astmefunktsiooni kiirusega. Täpsemalt:

$$A \sim \frac{1}{[(\alpha-1)k]^{\frac{1}{\alpha-1}}} t^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \text{kui} \quad t \to \infty.$$

Vastus: Kui $0 \le \alpha < 1$ jõuab kontsentratsioon nulli ajahetkel $t = \frac{A_0}{(1-\alpha)k}$. Juhul $\alpha \ge 1$, siis jõuab kontsentratsioon nulli kui aeg $t \to \infty$.

Ül 1.82. Ruumis paikneva õhu ruumala on $60\,\mathrm{m}^3$ ja algne hapnikusisaldus 16%. Ruumi lastakse juurde õhku hapnikusisaldusega 21% kiirusega $1600\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}}$. Sama kiirusega väljub ka segunenud õhk ruumist. Ruumis paikneb 10 inimest, kellest igaüks tarbib hapnikku kiirusega $250\,\frac{\mathrm{mL}}{\mathrm{min}}$. Leida aeg, mille jooksul ruumis paikneva õhu hapnikusisaldus tõuseb 20%-ni. Mõeldud on mahuprotsente.

Lahendus. Toome sisse järgmised suurused: $y(t)$ - ruumis sisalduva hapniku ruumala liitrites, t - aeg minutites. Tuletame järgmise diferentsiaalvõrrandi:

$$y' = \underbrace{1600 \cdot 0.21}_{\text{sissevool}} - \underbrace{1600 \cdot \frac{y}{60000}}_{\text{väljavool}} - \underbrace{10 \cdot 0.25}_{\text{tarbimine}}.$$

Algtingimus on $y(0) = 0.16 \cdot 60000$. Saame järgmise Cauchy ülesande:

$$y' = r - \varepsilon y, \quad y(0) = 9600,$$

kus

$$r = 1600 \cdot 0.21 - 2.5 = 333.5, \; \varepsilon = \frac{1600}{60000} \approx 0.0267.$$

Leiame diferentsiaalvõrrandi üldlahendi:

$$\frac{dy}{dt} = r - \varepsilon y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\varepsilon y - r} = -dt \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{\varepsilon y - r} = -\int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon}\ln|\varepsilon y - r| = -t + C^*,\ C^* \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = y_\infty - Ce^{-\varepsilon t},\ C \in \mathbb{R},$$

kus $y_\infty = \frac{r}{\varepsilon}$. Avaldame algtingimusele vastava erilahendi:

$$y(t) = y_\infty + (9600 - y_\infty)e^{-\varepsilon t}.$$

Ülesandes nõutud ajahetke t leidmiseks tuleb lahendada võrrand

$$y_\infty + (9600 - y_\infty)e^{-\varepsilon t} = 0.2 \cdot 60000.$$

Lahend on

$$t = -\frac{1}{\varepsilon}\ln\left(\frac{12000 - y_\infty}{9600 - y_\infty}\right) \approx 65.5\,\text{min}.$$

Vastus: Ruumis 20% hapniku sisalduse saavutamiseks kulub 65.5 minutit.

Ül 1.83. Talvel hoitakse kontorihoones tööajal õhutemperatuur 21°C. Küte lülitati välja kell 22:00 ja lülitati uuesti sisse kell 6:00. Ühel öösel kell 2:00 mõõdeti kontorihoones temperatuuriks 18°C. Õhutemperatuur väljas oli kell 22:00 10°C ja langes kell 6:00 4°C-ni. Milline oli õhutemperatuur hoones kell 6:00 hommikul, kui see sisse lülitati?

Katsed näitavad, et keha temperatuuri muutumise kiirus (ehk soojusvoog) on proportsionaalne keha ja ümbritseva keskkonna temperatuuri vahega (Newtoni jahutusseadus):

$$\frac{dT(t)}{dt} = \alpha(T(t) - t_{\text{välis}}), \tag{1.30}$$

kus $T(t)$ on sisetemperatuuri sõltuvus ajast, $\frac{dT(t)}{dt}$ on soojusvoog, α on soojusülekandetegur (mõõteühik on $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$. Siin eeldatakse, et välistemperatuur $t_{\text{välis}}$ on konstantne.

Lahendus. Kuna võrrandis peab olema konstantne välisõhu temperatuur, siis valime selleks temperatuuri keskväärtuse

$$t_{\text{välis}} = \frac{10 + 4}{2} = 7°\text{C}.$$

1) Eraldame diferentsiaalvõrrandis (1.30) muutujad

$$\frac{dT(t)}{T(t)-7} = \alpha\, dt$$

ning integreerime

$$\int \frac{dT(t)}{T(t)-7} = \int \alpha\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|T(t)-7| = \alpha\, t + \ln C.$$

Seega otsitav funktsioon on

$$T(t) = 7 + C\,\mathrm{e}^{\,\alpha\, t}.$$

2) Loeme kütte välja lülitamise hetkeks $t = 0$, st $T(0) = 21°\mathrm{C}$. Sellest algtingimusest leiame integreerimiskonstandi C

$$T(0) = 7 + C\,\mathrm{e}^{\,\alpha\cdot 0} = 21 \quad \Rightarrow \quad C = 14.$$

3) Määrame soojusülekandeteguri α. Kella 2:00 on kütte sulgemisest möödunud $t = 4$ tundi ja kontorihoone õhutemperatuur on $18°\mathrm{C}$, seega

$$T(4) = 7 + 14\,\mathrm{e}^{\,4\alpha} = 18 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{11}{14}\right) \approx -0.06,$$

millest leiame funktsiooni $T(t)$ lõpliku kuju:

$$T(t) = 7 + 14\,\mathrm{e}^{\,-0.06\, t}.$$

4) Hommikul kell 6:00 on kütte väljalülitamisest möödunud $t = 8$ tundi ja enne kütte sisselülitamist on kontorihoone ligikaudne õhutemperatuur

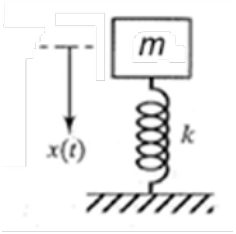
$$T(8) = 7 + 14\,\mathrm{e}^{\,-0.06\cdot 8} \approx 16°\mathrm{C}.$$

Vastus: Kütte sisselülitamise hetkel on õhutemperatuur $16°\mathrm{C}$.

Ül 1.84. Mehaanilise süsteemi vabavõnkumisi saab kirjeldada teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandiga

$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{1.31}$$

kus x on keha siire, m on võnkuva keha mass ja k vedru jäikus (vt joonis 1.12). Keha mass $m = 3600$ kg ja vedru jäikus $k = 90000$ N/m. Näita, et üldlahend kujul $x(t) = X\cos(\omega_n t - \Phi)$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit, kus t on aeg, X võnkeamplituud, omavõnkesagedus $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ja Φ on algfaas. Leida X ja Φ, kui kehale antakse algsiire $x(0) = 0.08$ m ja algkiirus $\dot{x}(0) = 0.1$ m/s.



Joonis 1.12: Võnkuv vedru-mass süsteem.

Lahendus. Leiame üldlahendist $x(t) = X\cos(\omega_n t - \Phi$ vajalikud tuletised ja asendame need differentsiaalvõrrandisse **(1.31)**:

$$-mX\omega_n^2\cos(\omega_n - \Phi) + kX\cos(\omega_n - \Phi) = 0 \quad \big| : [mX\,cos(\omega_n - \Phi)]$$

$$-\omega_n^2 + \frac{k}{m} = -\omega_n^2 + \omega_n^2 = 0$$

Leiame X ja Φ algtingimustest

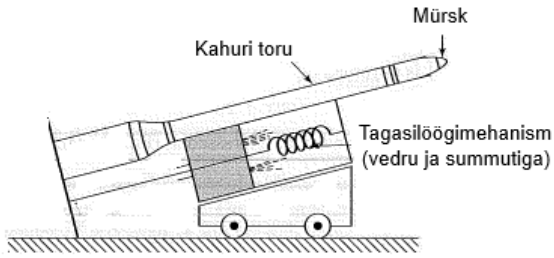
$$\begin{cases} x(0) = X\cos(-\Psi) = 0.08 \\ \dot{x}(0) = -X\omega_n\sin(-\Psi) = 0.1 \end{cases}$$

$$X = \sqrt{0.08^2 + \left(\frac{0.1}{5}\right)^2} = 0.082\,\text{m}$$

$$\Psi = \arctan\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n} = \arctan\frac{0.1}{0.08\cdot 5} = 0.245\,\text{rad} \approx 14^\circ.$$

Vastus: Võnkeamplituud $X = 0.082$ m ja algfaas $\Psi = 14^\circ$.

Ül 1.85. Joonisel on esitatud kahuri mehanism. Kui kahurist lastakse, kiirendavad kõrgrõhulised gaasid mürsku torus väga suure kiiruseni. Vastureaktsioonijõud surub kahuritoru vastassuunas võrreldes mürsu liikumisega. Kuna soovitav on tuua kahuritoru võimalikult kiiresti ja ilma võnkumiseta tagasi puhkeasendisse, liigub see tahapoole vastu kriitiliselt summutatud vedru–summuti süsteemi, mida nimetatakse tagasilöögimehhanismiks. Ühel konkreetsel juhul on kahuritoru ja tagasilöögimehhanismi kogumass $m = 500$ kg ning vedru jäikus $k = 10000$ N/m. Kahur liigub lasu tagajärjel tahapoole 0.4 m. Kahuri liikumist kirjeldab kriitiliselt summutatud liikumine kujul $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$, kus omavõnkesagedus $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ja konstandid $C_1 = x_0$ ning $C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0 = 0.1$. Leia kahuri tagasilöögi kiirus ja aeg, mis kulub kahuri tagasiliikumisel asendisse, mis jääb 0.1 m kaugusele esialgsest asendist.



Lahendus. Kahuri tagasilöögi maksimaalse asendi ajahetkel t_1 saame leida võrrandist $\dot{x}(t) = 0$. Diferentseerime liikumisvõrrandit

$$\dot{x}(t) = C_2 \mathrm{e}^{-\omega_n t} - \omega_n (C_1 + C_2 t) \mathrm{e}^{-\omega_n t}.$$

Et $\dot{x}(t) = 0$, saame

$$t_1 = \frac{1}{\omega_n} - \frac{C_1}{C_2}.$$

Kuna algasendis $x_0 = C_1 = 0$ saame

$$t_1 = \frac{1}{\omega_n} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ja maksimaalses tagasilöögiasendis $x_{max} = 0.4$, võime kirjutada

$$x_{max} = x(t_1) = C_2 t_1 \mathrm{e}^{-\omega_n t_1} = \dot{x}_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \mathrm{e}^{-1} = \frac{\dot{x}_0}{\mathrm{e}} \sqrt{\frac{m}{k}},$$

siit

$$\dot{x}_0 = x_{max}\,\mathrm{e}\,\sqrt{\frac{k}{m}} = 4.863\,\mathrm{m/s}.$$

Kui t_2 tähistab aega kahuri liikumiseks 0.1 m kaugusele esialgsest asendist, siis

$$0.1 = C_2\,t_2\,\mathrm{e}^{\,-\omega_n t_2} = 4.863\,t_2\,\mathrm{e}^{\,-4.472 t_2},$$

mis annab tulemuseks $t_2 = 0.826$ s.

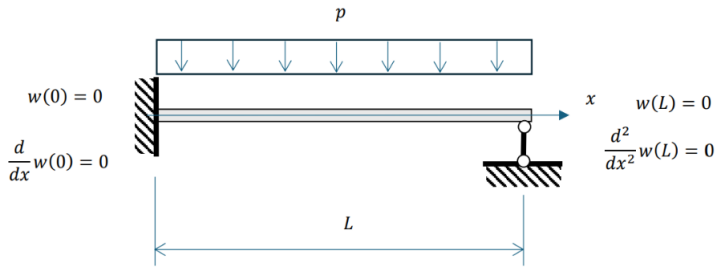
Vastus: Kahuritoru tagasilöögi kiirus on 4.863 m/s ja tagasiliikumiseks kulub 0.826 s.

Ül 1.86. Varda läbipainet saab kirjeldada diferentsiaalvõrrandiga

$$E\,I\,\frac{d^4}{dx^4}w = p, \tag{1.32}$$

kus p on talale rakendatud jõud pikkusühiku kotha, $w = w(x)$ on tala läbipaine ehk tala kesktelje punkti koordinaadiga x vertikaalne siirdumine koormuse p mõjul ja $E\,I$ on tala paindejäikus.

Leia diferentsiaalvõrrandi üldlahend ja sobita see ääretingimustega.



Joonis 1.13: Varda läbipaine.

Lahendus. Leiame diferentsiaalvõrrandi lahendi integreerimise teel. Kuna paindejäikus $E\,I$ ja talale rakendatud jõud p on konstandid, saame läbipainde leidmiseks mõlemaid pooli integreerida vajalik arv kordi.

Integreerime diferentsiaalvõrrandit (1.32) neli korda:

$$\begin{aligned}
E\,I\,\frac{d^3}{dx^3}w &= p\,x + C_1, \\
E\,I\,\frac{d^2}{dx^2}w &= \frac{p}{2}\,x^2 + C_1\,x + C_2, && (1.33)\\
E\,I\,\frac{d}{dx}w &= \frac{p}{6}\,x^3 + C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2\,x + C_3, && (1.34)\\
E\,I\,w(x) &= \frac{p}{24}\,x^4 + C_1\,\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3\,x + C_4. && (1.35)
\end{aligned}$$

Sellega on meil diferentsiaalvõrrandi lahendi üldkuju (1.35) leitud.

Sobitame nüüd lahendi ääretingimustega ehk leiame integreerimiskonstandid. Kasutame selleks joonisel 1.13 olevaid seoseid.

Esimeseks seoseks on tingimus, et läbipaine peab tala vasakpoolses otsas olema null ehk

$$w(0) = 0.$$

Üldlahendist (1.35) leiame

$$E\,I\,w(0) = \frac{p}{24}\cdot 0^4 + C_1\cdot\frac{0^3}{6} + C_2\cdot\frac{0^2}{2} + C_3\cdot 0 + C_4 = 0,$$

millest $C_4 = 0$.

Sarnaselt kasutame läbipainde esimese tuletisega seotud ääretingimust

$$\frac{d}{dx}w(0) = 0.$$

Selle ääretingimuse järgi ei tohi tala vasakpoolne ots pöörduda. Konstantide leidmiseks kasutame läbipainde tuletise avaldist (1.34)

$$E\,I\,\frac{d}{dx}w(0) = \frac{p}{6}\cdot 0^3 + C_1\cdot\frac{0^2}{2} + C_2\cdot 0 + C_3 = 0,$$

millest $C_3 = 0$.

Nüüd kasutame joonisel 1.13 olevaid parempoolseid ääretingimusi. Ka paremal peab läbipaine olema null, siis

$$w(L) = 0.$$

Arvestades eelnavelt leitud konstante $C_3 = C_4 = 0$, saame üldlahendist (1.35)

$$E\,I\,w(L) = \frac{p}{24}\cdot L^4 + C_1\cdot\frac{L^3}{6} + C_2\cdot\frac{L^2}{2} = 0. \tag{1.36}$$

Antud juhul tekkis meil pisut keerukam seos ja viimased konstandid saame leida koos viimase ääretingimusega. Selle ääretingimuse järgi on tala parema otsas läbipainde teine tuletis võrdne nulliga (vt joonis 1.13)

$$\frac{d^2}{dx^2}w(L) = 0.$$

Läbipainde teine tuletis korrutatuna läbi paindejäikusega on võrdeline tala otsas mõjuva momendiga. Kuna tala parempoolne tugi on selline, et see momenti vastu ei võta ja toele pole rakendatud ka välist momenti, peab avaldise väärtus võrduma nulliga. Siis võrdusest (1.33) saame

$$E\,I\,\frac{d^2}{dx^2}w(L) = \frac{p}{2}\cdot L^2 + C_1\cdot L + C_2 = 0. \tag{1.37}$$

Võrranditest (1.36) ja (1.37) koostame konstanitde C_1 ja C_2 määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{p}{24}\cdot L^4 + C_1\cdot\frac{L^3}{6} + C_2\cdot\frac{L^2}{2} = 0, \\ \frac{p}{2}\cdot L^2 + C_1\cdot L \quad + C_2 = 0. \end{cases}$$

Teisendame süsteemi kuuluvaid võrrandeid

$$p\,L^2 + 4L\,C_1 + 12C_2 = 0, \qquad C_2 = -\frac{p}{2}L^2 - C_1 L$$

ning teostame asenduse

$$p\,L^2 + 4L\,C_1 + 12\Big(-\frac{p}{2}L^2 - C_1 L\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{5}{8}\,p\,L.$$

Nüüd saame leida viimase konstandi

$$C_2 = -\frac{p}{2}L^2 - \Big(-\frac{5}{8}\,p\,L\Big)L \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{8}\,p\,L^2.$$

Võrdusest (1.35) leiame läbipaindfunktsiooni lõpliku kuju

$$w(x) = \frac{p}{48\,E\cdot I}\Big(2x^4 - 5L\,x^3 + 3L^2\,x^2\Big).$$

Teeme ühe näitearvutuse.

Olgu meil vardaks puidust ehituspruss ristlõikega $100 \times 50\,\text{mm}$ ja pikkusega $3\,\text{m}$. Tala ristlõike inertsmoment

$$I = 50 \cdot \frac{100^3}{12} = 4.167 \cdot 10^6\,\text{mm}^4 = 4.167 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4.$$

Puidu elastsusmoodul paindel olgu

$$E = 11 \cdot 10^3\,\text{MPa} = 11 \cdot 10^9\,\text{Pa}.$$

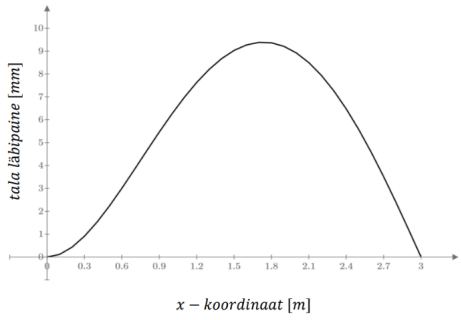
Paneme talale koormuse 100 kg meetri kohta ja teisendame selle njuutoniks millimeetri kohta ehk

$$p = 100 \cdot 9.81 = 981\,\text{N/m}.$$

Seega tala keskel saame läbipaindeks

$$w(1.5) = \frac{981}{48 \cdot 11 \cdot 10^9 \cdot 4.167 \cdot 10^{-6}}\big(2 \cdot 1.5^4 - 5 \cdot 3.0 \cdot 1.5^2 + 3 \cdot 3.0^2 \cdot 1.5^2\big) = 0.009\,\text{m}.$$

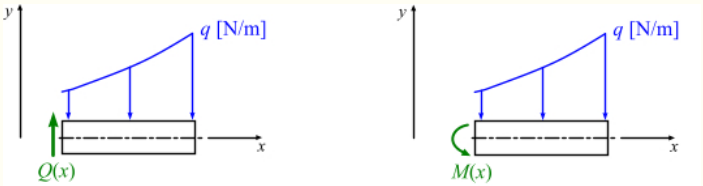
Seega, tala keskel on läbipaine 9 mm. Tala läbipainde graafiku kuju on toodud alloleval joonisel.



Prussi läbipaine.

Vastus: Varda läbipainet kirjeldav funktsioon on $w(x) = \frac{p}{48\,E\cdot I}\big(2x^4 - 5L\,x^3 + 3L^2\,x^2\big)$.

Ül 1.87. Koormus, mis mõjub risti tala teljega x, y-tasapinnas, tekitab talas sisejõududena põikjõudu $Q(x)$ [N] ja paindemomenti $M(x)$ [N · m]. Sisejõud tagavad koormatud olekus tala mahu- ja kujukindlust ning mis tahes mõttelise lõikega eraldatud talaosa tasakaalu.



$Q(x)$ tasakaalustab tala mõttelise osale mõjuvad y-telje sihilisedj õud

$M(x)$ tasakaalustab tala mõttelise osale mõjuvad z-telje sihilised momendid

Horisontaalsele jäiga kinnitusega talale mõjub vertikaalne joonkoormus, mille projektsioon y-teljele on antud avaldisega

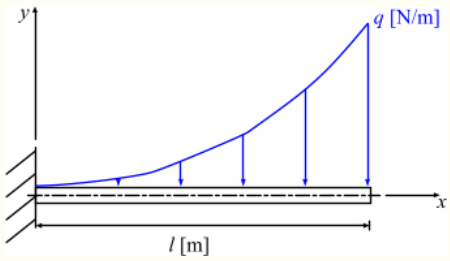
$$p(x) = -q\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 \Big[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\Big], \tag{1.38}$$

kus $q > 0$ on lauskoormuse intensiivsus tala paremas otsas ja l on tala pikkus. Teades diferentsiaalseoseid

$$Q'(x) = -p(x), \;\; M'(x) = Q(x) \text{ ja } M''(x) = -p(x)$$

arvutada sisejõud $Q(x)$ ja $M(x)$. Integreerimiskonstandid saab määrata ääretingimustest, et tala paremas otsas puudub koondjõud ja puudub koondmoment ehk põikjõud ja paindemoment peavad võrduma nulliga:

$$Q(l) = 0, \quad M(l) = 0.$$



Lahendus. Seosest (1.38) ja tingimusest $Q'(x) = -p(x)$ saame muutujate eraldamise järel

$$dQ(x) = -\Big(-q\Big(\frac{x}{l}\Big)^2\Big)dx \quad \Rightarrow \quad \int dQ(x) = \int q\Big(\frac{x}{l}\Big)^2 dx + C_1,$$

millest

$$Q(x) = \frac{q}{3\,l^2}x^3 + C_1.$$

Kasutades ääretingimust $Q(l) = 0$ leiame

$$\frac{q}{3\,l^2}x^3 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{q\,l}{3}$$

ning põikjõu avaldis on

$$Q(x) = \frac{q}{3\,l^2}x^3 - \frac{q\,l}{3}\ \text{[N]}.$$

Seosest $M'(x) = Q(x)$ saame muutujate eraldamise järel

$$dM(x) = \Big(\frac{q}{3\,l^2}x^3 - \frac{q\,l}{3}\Big)dx \quad \Rightarrow \quad \int dM(x) = \int \Big(\frac{q}{3\,l^2}x^3 - \frac{q\,l}{3}\Big)dx + C_2,$$

millest

$$M(x) = \frac{q}{12\,l^2}x^4 - \frac{q\,l}{3}\,x + C_2.$$

Kasutades ääretingimust $M(l) = 0$ leiame

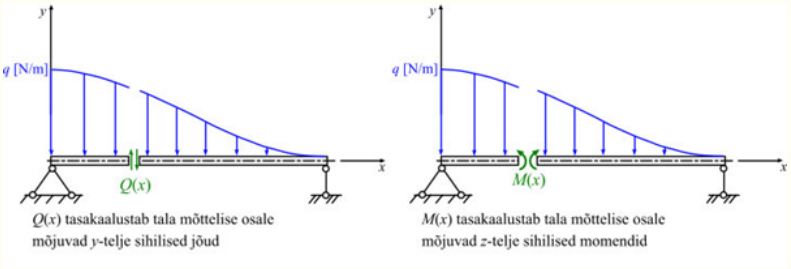
$$\frac{q}{12\,l^2}x^4 - \frac{q\,l}{3}\,x + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{q\,l^2}{4}$$

ning paindemomendi avaldis on

$$M(x) = \frac{q}{12\,l^2}x^4 - \frac{q\,l}{3}\,x + \frac{q\,l^2}{4}\ \text{[N}\cdot\text{m]}.$$

Vastus: Otsitavad sisejõud: $Q(x) = \frac{q}{3\,l^2}x^3 - \frac{q\,l}{3}$ [N], $M(x) = \frac{q}{12\,l^2}x^4 - \frac{q\,l}{3}\,x + \frac{q\,l^2}{4}$ [N$\cdot$m].

Ül 1.88. Koormus, mis mõjub risti tala teljega x, y-tasapinnas, tekitab talas sisejõududena põikjõudu $Q(x)$ $[N]$ ja paindemomenti $M(x)$ $[N \cdot m]$. Sisejõud tagavad koormatud olekus tala mahu- ja kujukindlust ning mis tahes mõttelise lõikega eraldatud talaosa tasakaalu.



Horisontaalne tala on toestatud kahekst otsast: vasakult liikumatu liigendtoega ja paremalt liikuva liigendtoega. Talale mõjub vertikaalne joonkoormus, mille projektsioon y-teljele on antud avaldisega

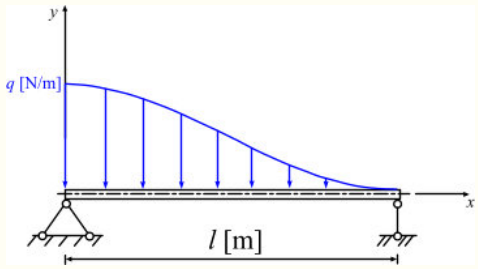
$$p(x) = -\frac{q}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi\, x}{l}\right)\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right], \tag{1.39}$$

kus $q > 0$ on lauskoormuse intensiivsus tala vasakus otsas ja l on tala pikkus. Teades diferentsiaalseoseid

$$Q'(x) = -p(x), \;\; M'(x) = Q(x) \text{ ja } M''(x) = -p(x)$$

arvutada sisejõud $Q(x)$ ja $M(x)$. Integreerimiskonstandid saab määrata ääretingimustest, et liigendtugedes tala mõlemas otsas puudub koondmoment ehk paindemoment võrdub nulliga:

$$M(0) = 0, \quad M(l) = 0.$$



Lahendus. Seosest (1.39) ja tingimusest $Q'(x) = -p(x)$ saame muutujate eraldamise järel

$$dQ(x) = -\Big(-\frac{q}{2}\Big(1+\cos\frac{\pi\,x}{l}\Big)\Big)dx \quad \Rightarrow \quad \int dQ(x) = \frac{q}{2}\int\Big(1+\cos\frac{\pi\,x}{l}\Big)dx + C_1,$$

millest

$$Q(x) = \frac{q}{2}\Big(x + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi\,x}{l}\Big) + C_1 \ \text{[N]}.$$

Seosest $M'(x) = Q(x)$ saame muutujate eraldamise järel

$$dM(x) = \left(\frac{q}{2}\Big(x + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi\,x}{l}\Big) + C_1\right)dx,$$

$$\int dM(x) = \int\left(\frac{q}{2}\Big(x + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi\,x}{l}\Big) + C_1\right)dx + C_2,$$

millest

$$M(x) = \frac{q}{2}\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi\,x}{l}\Big) + C_1 x + C_2 \ \text{[N}\cdot\text{m]}.$$

Ääretingimusest $M(0) = 0$ leiame

$$\frac{q}{2}\Big(\frac{0^2}{2} - \frac{l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi\cdot 0}{l}\Big) + C_1\cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{q\,l^2}{2\pi^2}.$$

Parempoolsest ääretingimusest $M(l) = 0$ leiame

$$\frac{q}{2}\Big(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{\pi^2}\cdot\big(-1\big)\Big) + C_1\cdot l + \frac{q\,l^2}{2\pi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{q\,l}{4} - \frac{q\,l}{\pi^2}.$$

Vastus: Põikjõud: $Q(x) = \frac{q}{2}\Big(x + \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi\,x}{l}\Big) - \frac{q\,l}{4} - \frac{q\,l^2}{\pi^2}$ [N],
paindemoment: $M(x) = \frac{q}{2}\Big(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{\pi^2}\cos\frac{\pi\,x}{l}\Big) - (\frac{q\,l}{4} + \frac{q\,l}{\pi^2})x + \frac{q\,l^2}{2\pi^2}$ [N · m].

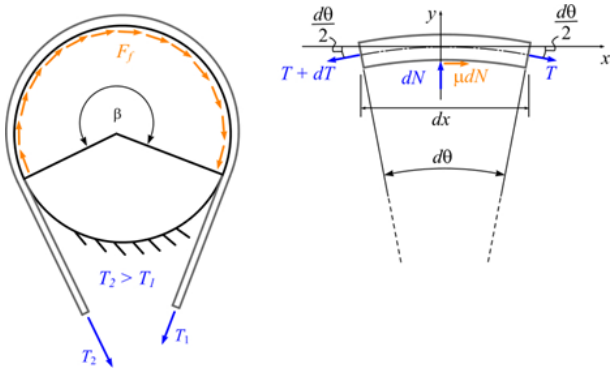
Ül 1.89. Köis või rihm on hõõrdega ümber konstantse raadiusega fikseeritud ploki ja tõmmatud kahest otsast jõududega T_1 ning T_2. Eeldades, et $T_2 > T_1$. ja köis on ümber ploki nurga β ulatuses, leida suhe T_2/T_1 vahetult enne köie plokil libisema hakkamist.

Lahendus. Lihtsa hõõrdeteooria alusel on maksimaalne hõõrdejõud võrdeline pinna normaalreaktsiooniga N, võrdeteguriks on hõõrdetegur μ:

$$\max F = \mu N.$$

Vaadeldes köie elementaarpikkuse dx tasakaalu sellele mõjuvate jõudude toimel ja projekteerides need jõud x ja y–teljele, jõuame võrranditeni:

$$\sum F_x = 0 \qquad (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - \mu dN = 0,$$
$$\sum F_y = 0 \qquad dN - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} - T\sin\frac{d\theta}{2} = 0.$$



Kasutades lihtsustusi

$$\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}, \qquad \cos\frac{d\theta}{2} \approx 1$$

jõuame seosteni

$$dT = \mu\, dN \quad \text{ja} \quad dN = T\, d\theta.$$

Nendest seostest saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$dT = \mu\, T\, d\theta \quad \Rightarrow \quad \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^{\beta} d\theta \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\,\beta,$$

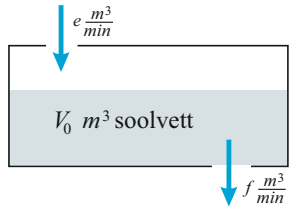
millest pärast potenseerimist leime suhte

$$\frac{T_2}{T_1} = \mathrm{e}^{\,\mu\,\beta}.$$

Vastus: $\dfrac{T_2}{T_1} = \mathrm{e}^{\,\mu\,\beta}$ või $T_2 = T_1\mathrm{e}^{\,\mu\,\beta}$.

Ül 1.90. Paagis on V_0 m^3 soolvett, mis sisaldab a kg soola. Paaki lisatakse soolvett, mille kuupmeeter sisaldab b kg soola, kiirusega $e\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. Paagis olevat lahust segatakse hoolikalt ja samal ajal väljub paagi avatud kraanist soolvesi kiirusega $f\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$. Koostada diferentsiaalvõrrand. mille lahend kirjeldab suvalisel ajahetkel t paagis oleva soola kogust.

Lahendus. Olgu $Q = Q(t)$ ajahetkel t paagis oleva soola kogus kilogrammides.



Paaki siseneva soolvee kuupmeetris on soola kontsentratsioon $b\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, seega paaki lisandub soola kiirusega

$$b\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot e\,\frac{\text{m}^3}{\text{min}} = b\,e\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Ajahetkel t on paagis soolvett:

$$V_0 + e\cdot t - f\cdot t \quad [\text{m}^3]$$

Seega ajahetkel t on soola kontsentratsioon paagis olevas soolvees:

$$\frac{Q(t)}{V_0+(e-f)t} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$$

Paagis oleva soola koguse muutumist kirjeldab diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dQ}{dt} = b\,e - f\cdot\frac{Q(t)}{V_0+(e-f)t} \quad\Rightarrow\quad \frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0+(e-f)t}Q(t) = b\,e.$$

Vastus: Otsitav diferentsiaalvõrrand on $\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0+(e-f)t}Q(t) = b\,e$.

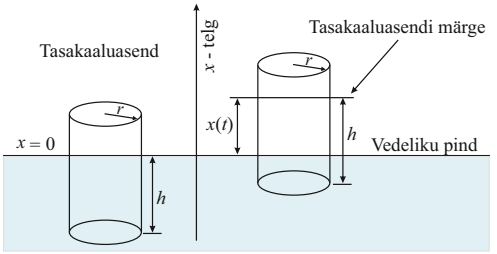
Ül 1.91. Vedelikku tihedusega ϱ on asetatud silinder raadiusega r ja kõrgusega H. Ujuva silindri vedeliku pinnast allapoole jääva osa kõrgus on h. Silinder tõstetakse vertikaalselt üles ja lastakse lahti. Koostada diferentsiaalvõrrand, mis kirjeldab silindri vertikaalset liikumist vedelikus, kui silindri mass on m.

Lahendus. Vedelikus või gaasis paiknevale kehale mõjub kaks vastassuunalist jõudu:

- raskusjõud (uputav jõud)
- üleslükke- ehk Archimedese jõud.

Kehale mõjuv üleslükkejõud on võrdne keha poolt välja tõrjutud vedeliku või gaasi kaaluga.

Silinder ujub vedelikus siis, kui sellele mõjuv üleslükkejõud on võrdne silindrile mõjuva raskusjõuga.



Joonise vasakul poolel on kujutatud tasakaaluasendit, kus silindri kõrgusest on h ühikut vedeliku tasapinna all.

Kui silinder raadiusega r on tasakaaluasendis, siis silindri poolt väljatõrjutud vedeliku ruumala on $\pi r^2 h$. Järelikult üleslükkejõud on $\pi r^2 h\varrho$ ja see peab olema võrdne silindri kaaluga mg, so

$$\pi r^2 h\varrho = mg,$$

kus g on raskuskiirendus.

Kui silinder tõstetakse vedeliku tasapinnast $x(t)$ ühiku võrra üles, siis üleslükkejõud väheneb ja selle väärtus on

$$\pi r^2 (h - x(t))\varrho,$$

kuid silindrile mõjuv raskusjõud on endiselt mg.

Newtoni teise seaduse põhjal

$$m\ddot{x} = \pi r^2 \big(h - x(t)\big)\varrho - mg,$$

millest pärast lihtsutamist leiame

$$m\ddot{x} = -\pi r^2 x(t)\varrho \qquad \text{või} \qquad \ddot{x} + \frac{\pi r^2 \varrho}{m} x = 0.$$

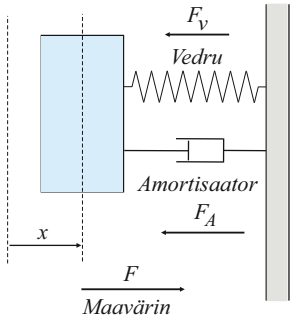
Selle võrrandi tuletamisel on arvestatud ainult üleslükke- ja raskusjõuga, õhutaksistus jms on arvestamata.

Vastus: Otsitav diferentsiaalvõrrand on $\ddot{x} + \frac{\pi r^2 \varrho}{m} x = 0$.

Ül 1.92. Kõrghoone tippu on paigaldatud seismiline mass-summuti, mis koosneb raskest plokist massiga $m = 2000$ kg ja vedrusüsteemist, mille jäikus on $k = 2.88 \times 10^5 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Võnkumise amplituudi vähendamiseks on summutil amortisaator, mille summutuskoefitsient on $c = 1.4 \times 10^4 \ \frac{\mathrm{N{\cdot}s}}{\mathrm{m}}$.

Maavärina alguses nihkub hoone ja sellega koos ka mass-summuti tasakaaluasendist 0.3 m võrra külgsuunas ning saab algkiiruse 1.0 $\frac{m}{s}$. Eeldame, et süsteemile ei mõju täiendavaid väliseid jõude peale esialgse nihke ja kiiruse. Leidke mass-summuti asukoht $x(t)$ ja kiirus $v(t)$ suvalisel ajahetkel t.

Lahendus. Joonisel (1.14) on kujutatud seismilise summuti tööpõhimõtet.



Joonis 1.14: Seismiline summuti

Olgu $x = x(t)$ raske ploki nihe ajahetkel t. Siis ploki liikumise kiirus $v(t)$ ja kiirendus $a(t)$ on vastavalt

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = x', \qquad a(t) = \frac{d}{dt}\Big(v(t)\Big) = \frac{d^2x}{dt^2} = x''$$

Plokile mõjuv jõud $F = ma$ (Newtoni teine seadus) ja sellele vastassuunas mõjuvad vedru elastusjõud $F_v = kx$ (Hooke'i seadus) ja amortisaatori poolt tekitatud summutav jõud, mis on võrdeline ploki liikumise kiirusega, so $F_A = cv$. Seega

$$F = -F_v - F_A \qquad \Rightarrow \qquad mx'' = -kx - cx'.$$

Viimasest saame teist järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$mx'' + cx' + kx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Viimase võrrandi võime esitada kujul

$$x'' + 2\mu x' + \omega^2 x = 0,$$

kus $\mu = \frac{c}{2m}$ ja $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Lahendame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 + 2\mu\,\lambda + \omega^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}.$$

Leiame ülesande andmete põhjal kordajad μ ja ω

$$\mu = \frac{c}{2m} = \frac{1.4 \times 10^4}{2 \cdot 2000} = 3.75, \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2.88 \times 10^5}{2000} = 144$$

Kuna $\mu^2 - \omega^2 < 0$, siis karakteristliku võrrandi lahendiks on kaaskompleksarvude paar

$$\lambda \approx -3.75 \pm 11.399\,\mathrm{i}.$$

Järelikult diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$x(t) = \mathrm{e}^{-3.74\,t}\big(C_1 \cos(11.399\,t) + C_2 \sin(11.339\,t)\big)$$

Integreerimiskonstandid C_1 ja C_2 tuleb määrata algtingimustest

$$x(0) = 0.3 \qquad \text{ja} \qquad x'(0) = 1.$$

Seega

$$0.3 = \mathrm{e}^{-3.74\cdot 0}\big(C_1 \cos(11.399 \cdot 0) + C_2 \sin(11.339 \cdot 0)\big) \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.3$$

Leiame tuletise

$$x'(t) = \mathrm{e}^{-3.75t}((11.399C_2 - 3.75C_1)\cos(11.399t) + (-3.75C_2 - 11.399C_1)\sin(11.399t)),$$

millest saame, et

$$1 = 11.399C_2 - 3.75C_1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.18642$$

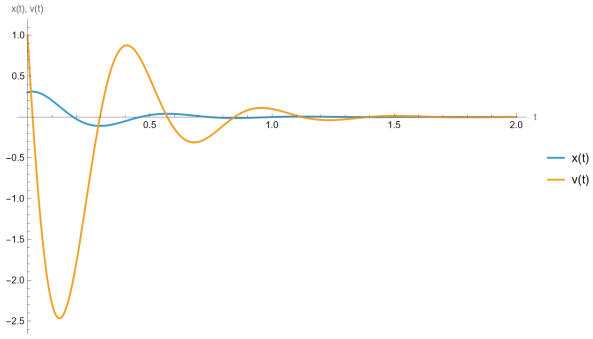
Järelikult otsitav erilahend on

$$x(t) = \mathrm{e}^{-3.74\,t}\big(0.3\cos(11.399\,t) + 0.18642\sin(11.339\,t)\big).$$

Leitud erilahendi saab esitada kujul

$$x(t) = 0.3\,\mathrm{e}^{-3.74\,t}\big(\cos(11.399\,t) + 0.6214\sin(11.339\,t)\big).$$

Joonisel on kujutatud ploki nihke $x = x(t)$ ja kiiruse $v = v(t)$ sumbumine ajavahemikus $0 \leqslant t \leqslant 2$ sekundit.



Graafikult näeme, et ploki asukoht $x(t)$ võngub alguses tugevamalt, kuid tänu summutusele väheneb võnkumise amplituud kiiresti.

Algul kiiruse absoluutväärtus kasvab, kuid siis sumbub. Seega süsteem saavutab tasakaalu, ehk liikumine lakkab umbes 2–3 sekundi jooksul.

Vastus: Mass-summuti asukoht $x(t) = 0.3\,\mathrm{e}^{-3.74\,t}\big(\cos(11.399\,t) + 0.6214\sin(11.339\,t)\big)$.

Ül 1.93. Betoonitööde käigus jäeti värskelt valatud betoonpõrand jahtuma ruumi, kus õhutemperatuur on püsivalt 20°C. Valamise hetkel oli betoonisegu temperatuur 30°C.
Meister saabus objektile kell 10.00 ning mõõtis betooni sisetemperatuuriks 25°C. Kaks tundi hiljem ($t = 2$) on temperatuur langenud 23,5°C.
Millal valati betoon?

NB! Newtoni seaduse järgi on mistahes keha jahtumise kiirus õhus võrdeline keha ja õhu temperatuuride vahega. Selles ülesandes eeldame, et pärast betooni valamist ei toimu olulist hüdratsioonist põhjustatud soojuse eraldumist ning betoon jahtub kohe.

Lahendus. Newtoni seaduse diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - 20),$$

kus $T(t)$ on betooni temperatuur ja 20°C ümbritsev õhutemperatuur.

1. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Kirjutame võrrandi kujul

$$\frac{dT}{T - 20} = -k\,dt.$$

Integreerime:

$$\int \frac{1}{T - 20}\,dT = \int -k\,dt + C_1,$$
$$\ln|T - 20| = -kt + C_1.$$

Eemaldame logaritmi:

$$T - 20 = Ce^{-kt},$$

ehk

$$T(t) = 20 + Ce^{-kt}.$$

2. Konstandi C leidmine

Hetkel $t = 0$ on $T(0) = 25$:

$$25 = 20 + C \quad \Rightarrow \quad C = 5.$$

Seega

$$T(t) = 20 + 5e^{-kt}.$$

3. Konstandi k leidmine

Kahe tunni pärast ($t = 2$) on $T(2) = 23{,}5$:

$$23{,}5 = 20 + 5e^{-2k},$$
$$3{,}5 = 5e^{-2k},$$
$$e^{-2k} = 0{,}7.$$

Logaritmime:

$$-2k = \ln(0{,}7), \qquad k = -\frac{1}{2}\ln(0{,}7).$$

4. Millal oli temperatuur 30°C**?**

Otsime aega $t < 0$, mil

$$T(t) = 30.$$

$$30 = 20 + 5e^{-kt},$$

$$10 = 5e^{-kt},$$

$$2 = e^{-kt}.$$

Logaritmime:

$$-kt = \ln 2, \qquad t = -\frac{\ln 2}{k}.$$

Asendame $k = -\frac{1}{2}\ln(0{,}7)$:

$$t = \frac{\ln 2}{\frac{1}{2}\ln(0{,}7)} = 2\,\frac{\ln 2}{\ln(0{,}7)}.$$

Arvutame välja:

$$t \approx 2 \cdot \frac{0{,}6931}{-0{,}3567} \approx -3{,}89.$$

5. Tõlgendus

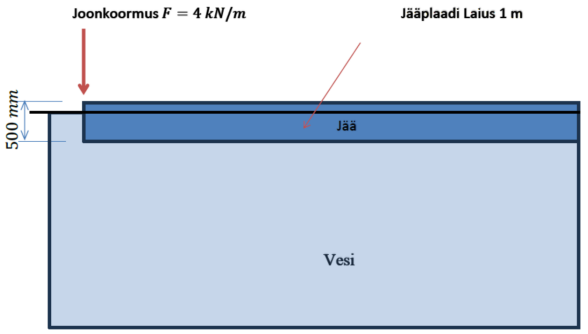
Negatiivne aeg tähendab sündmust enne esimest mõõtmist:

$$t \approx -3{,}9 \text{ tundi}.$$

Seega valati betoon umbes 4 tundi enne esimest mõõtmist, st ligikaudu kell 06.00.

Ül 1.94. Lõpmatult pikk jääplaat laiusega 1 m ja paksusega 0.5 m ujub vees. Plaadi vabale otsale rakendatakse koormus F. Vee tiheduseks võib võtta 1000 $\mathrm{kg/m^3}$ ja jää tiheduseks 900 $\mathrm{kg/m^3}$. Ülesandeks on hinnata murduva jäätüki suurust jää purunemisel. Klassikalise jäälõhkumisvõimega laev purustab jääd nii, et laeva nina liigub jääplaadi peale ja vajutab raskusega jääplaadi vaba otsa sügavamale vette. Selle tulemusena tekib jääplaadi vabast otsast teatud kaugusel plaadi omakaalu ja üleslükkejõu summana tõmbepinged, mis purustavad jää.

Lahendus. Jääplaadi käitumist saab kirjeldada plaadina, mis on koormatud joonkoormuse, omakaalu ja jääplaadi üleslükkejõuga.



Joonis 1.15: Jääplaadi koormamine

Plaadi painde diferentsiaalvõrrand avaldub kujul

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) = q(x,y),$$

kus D on jääplaadi paindejäikus, w on plaadi vertikaalne siire ja q on plaadile rakendatud koormus pinnaühiku kohta. Paindejäikus D avaldub kujul

$$D = \frac{E\,h^3}{12(1-v^2)},$$

kus E on jää paindeelastsusmoodul (ühtlane merejää $E = 2\cdot 10^3$ MPa), v on jää Poissoni tegur $v = 0.3$ ja h on jääplaadi paksus. Kuna antud juhul on tegemist ühedimensionaalse probleemiga, siis teiseneb plaadi painde diferentsiaalvõrrand

oluliselt lihtsamale kujule

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q(x,y). \tag{1.40}$$

Plaadile mõjuva omakaalu pinnaühiku kohta saab arvutada järgneva avaldise abil

$$q_{\text{kaal}} = \rho_{\text{jää}} \cdot g \cdot h,$$

kus $\rho_{\text{jää}}$ on jää tihedus ja g raskuskiirendus.

Sarnaselt saab arvutada jääplaadile mõjuva üleslükkejõu

$$q_{\text{üles}} = \rho_{\text{vesi}} \cdot g \cdot (h_0 + w),$$

kus ρ_{vesi} on vee tihedus w on plaadi vertikaalne siire ja h_0 on kõrgus milleni jää oma raskuse all vette vajub.

Paneme koormused diferentsiaal võrrandisse (1.40) ja viime kõik liikmed, mis sisaldavad läbipainet w vasakule poole

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_{\text{vesi}} \cdot g \cdot w = \rho_{\text{jää}} \cdot g \cdot h - \rho_{\text{vesi}} \cdot g \cdot h_0. \tag{1.41}$$

Kuna h_0 on jää uppumise sügavus, siis saab hüdrostaatilisest tasakaalust välja kirjutada seose jääplaadi pikkusega dx ja laiusega dy omakaalu ja üleslükkejõu vahel. Kuna plaadi omakaal kaal ja ja jääplaadile mõjuv üleslükkejõud peavad olema võrdsed, siis saame seose

$$\rho_{\text{jää}} \cdot g \cdot h \cdot dx \cdot dy = \rho_{\text{vesi}} \cdot g \cdot h_0 \cdot dx \cdot dy,$$

seepärast peab differentsiaalvõrrandi (1.41) parem pool olema võrdne nulliga ja selle võrrandi saame teisendada kujule

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho_{\text{vesi}} \cdot g}{D} \cdot w = 0,$$

ehk

$$w^{IV} + a^4 w = 0, \tag{1.42}$$

kus $a^4 = \dfrac{\rho_{\text{vesi}} \cdot g}{D} \in \mathbb{R}$.

See on konstntsete kordajatega lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand, mille lahendamiseks moodustame karakteristliku võrrandi

$$\lambda^4 + a^4 = 0. \tag{1.43}$$

Karakteristlikust võrrandist saame

$$\lambda^4 = -a^4 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \sqrt[4]{-a^4}.$$

Võrrandi (1.43) lahendite leidmiseks esitame juuritava arvu trigonomeetrilisel kujul

$$-a^4 = a^4\big(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\big).$$

Meenutame, et kompleksarvu $z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ n-astme juur arvutatakse järgmiselt

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big),\quad (k=0,1,2,\dots,n-1).$$

Seega

$$\sqrt[4]{-a^4}=a\Big(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\Big),\quad (k=0,1,2,3).$$

Leiame kõik juured

$$\begin{aligned}
k=0\qquad &\lambda_1=a\big(\cos\tfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{4}\big) &&=\frac{a}{\sqrt{2}}\big(1+\mathrm{i}\big),\\
k=1\qquad &\lambda_2=a\big(\cos\tfrac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\tfrac{3\pi}{4}\big) &&=\frac{a}{\sqrt{2}}\big(-1+\mathrm{i}\big),\\
k=2\qquad &\lambda_3=a\big(\cos\tfrac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{4}\big) &&=\frac{a}{\sqrt{2}}\big(-1-\mathrm{i}\big),\\
k=3\qquad &\lambda_4=a\big(\cos\tfrac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\tfrac{7\pi}{4}\big) &&=\frac{a}{\sqrt{2}}\big(1-\mathrm{i}\big).
\end{aligned}$$

Siin lahendid λ_1 ja λ_4 ning λ_2 ja λ_3 on kaaskompleksarvude paarid. Teame, et igale karakteristliku võrrandi lahendiks olevale kaaskompleksarvude paarile $\lambda=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ vastab diferentsiaalvõrrandi lahend

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}\big(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\big).$$

Diferentsiaalvõrrandi (1.42) üldlahendiks on karakteristilku võrrandi mõlemale kaaskompleksele lahendite paarile vastav lineaarne kombinatsioon

$$\begin{aligned}
w=\ &\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\big(C_1\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\big)+\\
&+\mathrm{e}^{\frac{a}{\sqrt{2}}x}\big(C_3\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\big).
\end{aligned}\tag{1.44}$$

Võtame nüüd arvesse ääretingimused. Kuna läbipaine peab servast kaugemale minnes kaduma, siis konstandid, mis sisaldavad avaldist $\mathrm{e}^{\frac{a}{\sqrt{2}}x}$, peavad olema nullid. Seega konstandid $C_3=0$ ja $C_4=0$. Lisaks saab oletada, et jääplaadi vabale otsale on rakendatud lõikejõud ja paindemoment selles otsas peab kaduma, kuna momenti vabale servale rakendatud ei ole. Lõikejõud ja paindemoment avalduvad plaaditeoorias läbipainde w kaudu järgnevalt

$$M=-D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\qquad\text{ja}\qquad Q=-D\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}.$$

Konstantide C_1 ja C_2 määramiseks kasutame ääretingimusi plaadi vabas otsas

$$M(0)=-D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0\qquad\text{ja}\qquad Q(0)=-D\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=0}=-F.$$

Eespool märkisime, et plaadi servast kaugenemisel on üldlahendis (1.44) konstandid $C_3=0$ ja $C_4=0$. Seega

$$w=\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\big(C_1\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\big),\tag{1.45}$$

milles konstantide C_1 ja C_2 määrmamiseks tuleb leida ääretingimustes nõutud tuletised.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} =& -\frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big(C_1\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x + C_2\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big)+\\ &+\frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big(-C_1\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x + C_2\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big) =\\ &=\frac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big((C_2-C_1)\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x - (C_2+C_1)\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} =& -\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big((C_2-C_1)\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x - (C_2+C_1)\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big)+\\ &+\frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big(-(C_2-C_1)\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x - (C_2+C_1)\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big) =\\ =&\ a^2\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big(C_1\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x - C_2\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} =& -\frac{a^3}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big(C_1\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x - C_2\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big)+\\ &+\frac{a^3}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big(C_1\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x + C_2\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big) =\\ =&\frac{a^3}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\Big((C_1+C_2)\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x - (C_1-C_2)\sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big)\end{aligned}$$

Kuna moment peab plaadi alguses olema 0, siis see tähendab, et

$$M(0) = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0,$$

siis teise tuletise avaldisest saame

$$a^2\big(C_1\sin 0 - C_2\cos 0\big) = -a^2C_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad C_2 = 0.$$

Teisest rajatingimusest

$$Q(0) = -D\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=0} = -F$$

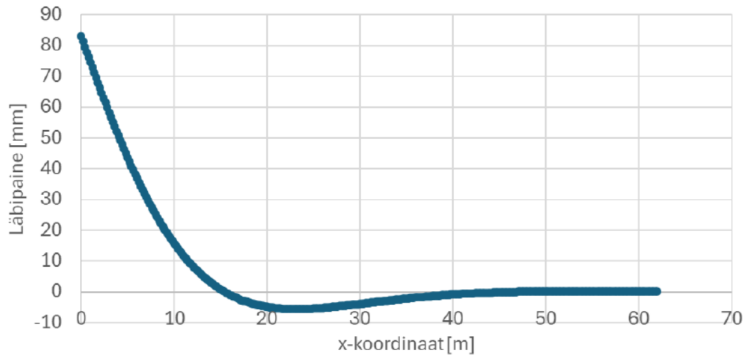
saame

$$-D\Big(\frac{a^3}{\sqrt{2}}\big(C_1\cos 0 - C_1\sin 0\big)\Big) = -F \quad\Rightarrow\quad C_1 = \frac{\sqrt{2}\,F}{a^3D}.$$

Lõpuks saame kirjutada lahendi plaadi läbipaindele

$$w(x) = C_1\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\cos\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}x\Big)$$

Joonisel 1.16 on toodud jääplaadi läbipainde kuju, kui jää paksus on 0.5 m ja jääplaadi vabale servale mõjub koormus $4\,{}^{\mathrm{kN}}/_{\mathrm{m}}$.

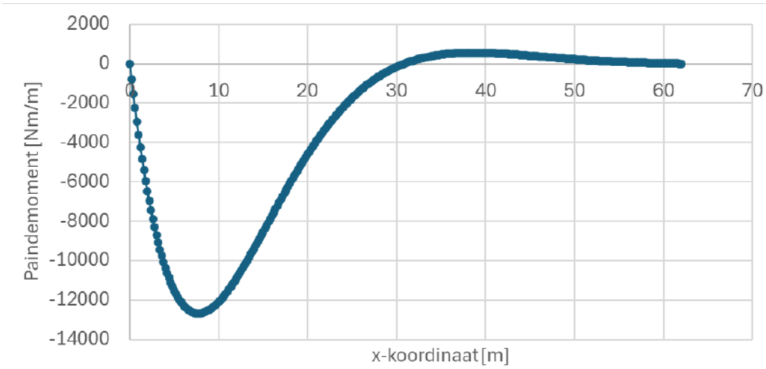


Joonis 1.16: Jääplaadi läbipaine

Jääplaadi purunemist põhjustavad positiivsed paindepinged (tõmbepinged) plaadi ülemises kihis ja need on proportsionaalsed paindemomendiga. Vastavalt plaaditeooriale saame paindemomendi arvutada järgnevalt

$$M(x) = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -Da^2 C_1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x} \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}x\right).$$

Paindemomendi kõver on ära toodud joonisel (1.17). Sellelt loeb välja, et paindemoment saavutab maksimumi umbes 8 m juures ja kuna paindemoment ja paindepinged on proportsionaalsed, siis tekib kõige tõenäolisemalt pragu just jääplaadi sellesse ossa, kus moment on maksimaalne.



Joonis 1.17: Jääplaadi paindemoment

Määrame lõikejõu paindemomendi maksimaalse väärtuse leidmiseks. Kuna lõikejõud on momendiavaldise tuletis, siis saame maksimaalse paindemomendi asukoha määrata punkti järgi, kus lõikejõud käib esimest korda nullist läbi. Lõikejõu avaldiseks saame

$$Q(x) = -D\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -D\frac{a^3}{\sqrt{2}}\,C_1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}x}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x - \sin\frac{a}{\sqrt{2}}x\right).$$

Lõikejõud on võrdne nulliga, kui

$$\cos\frac{a}{\sqrt{2}}x - \sin\frac{a}{\sqrt{2}}x = 0$$

ehk

$$\tan\frac{a}{\sqrt{2}}x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sqrt{2}}x = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4a}.$$

Pannes sisse olemasolevad väärtused, saame maksimaalseks x väärtuseks 7.7 m. Seega tekivad 0.5 meetri paksuse jää purustamisel antud idealiseeritud tingimustes jäätükid, mille maksimaalne pikkus küünib 7.7 m meetrini.

Momendi maksimaalse väärtuse saame arvutada järgnevalt, kui paneme momendiavaldisse x väärtuse, mis vastab lõikejõu nullkohale

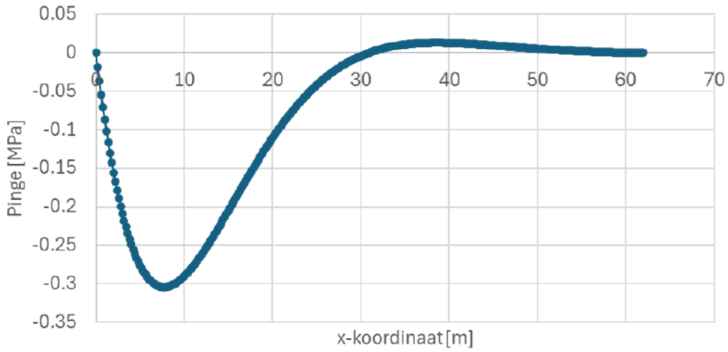
$$M_{max} = M\left(\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4a}\right) = -Da^2C_1\mathrm{e}^{-\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4a}}\sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4a}\right) = -\frac{Da^2C_1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Plaaditeooria puhul on maksimaalne paindepinge leitav momendi avaldise abil

$$\sigma_{max} = -\frac{6}{h^2}M_{max} = \frac{6}{h^2}\frac{Da^2C_1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Suurimaks paindepingeks kaugusel 7.7 m tuleb umbes 0.3 MPa, mis on tegelikult ka esimese aasta[1] Läänemere jää tõmbetugevus 0 kraadi juures. Seega on koormus $3\,\mathrm{kN/m}$ on ligikaudne jõu väärtus, mis võimaldaks jääplaadist tüki lahti murda.

[1] Eristatakse esimesel ja sellele järgnevatel aastatel tekkinud jääd, sest mitmeaastasel jääl on tugevusomadused paremad. Seepärast mainitakse jää tugevusomadusi välja tuues tavaliselt ära selle vanus.



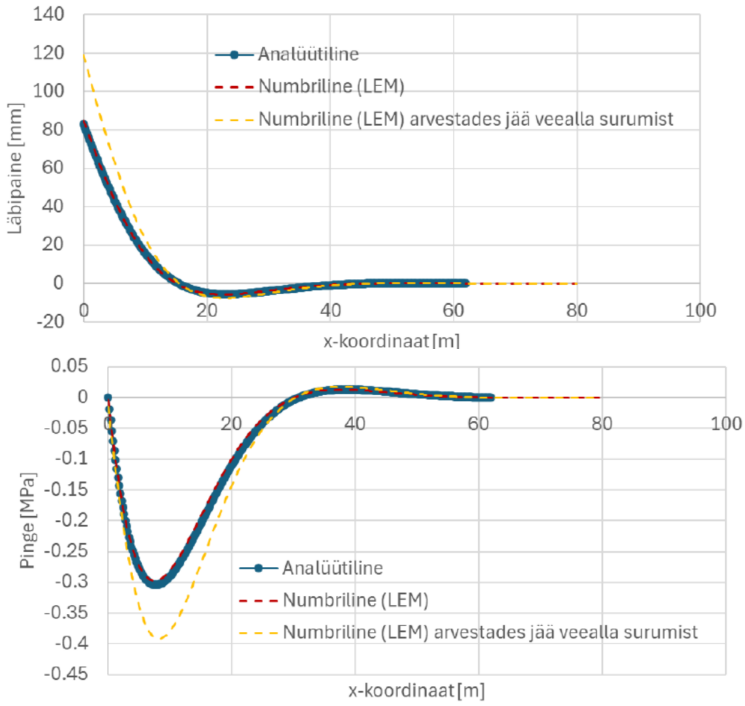
Jääplaadi paindepinge

Antud mudel on lihtsustus ja tegelikult ei võta antud lahend arvesse seda, et mingi osa jääplaadist võidakse suruda vette ka nii, et plaat upub täielikult. Ka antud lahenduse korral on võimalik märgata, et mingis osas vajub jää allapoole veepinda. Kuna plaat ujub vees

$$h_0 = \frac{\rho_{\text{jää}}}{\rho_{\text{vesi}}} \cdot h = \frac{900}{1000} \cdot 0.5 = 0.45\,\text{m}$$

sügavusel, siis tavaolukorras jääb jääplaadi ülemine pind umbes 50 mm veepinnast kõrgemale. Seega, kui suruda jääplaati vette antud väärtusest rohkem, siis ei lisandu enam täiendavat üleslükkejõudu. Läbipaindegraafikust tuleb selgelt välja, et umbes 5 m osa plaadi vabast otsast surutakse antud koormusega veepiirist allapoole. Seega on momendijaotus tõenäoliselt ebatäpne. Kõigest hoolimata ei muutu oluliselt momendi maksimaalse väärtuse asukohta. Siiski on vajalik koormus jää purustamiseks väiksem.

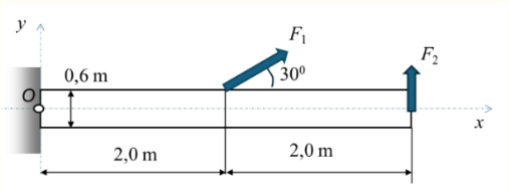
Allpool on võrdluseks toodud analüütiliselt ja numbriliselt arvutaud läbipainde ja paindepinge graafikud. Numbrilise arvutusmeetodina kasutati lõplike elementide meetodit (LEM). Numbrilise lahendina on esitatud ka olukord, kus on arvestatud täpsustatud üleslükkejõuga selles osas, kus jää siire alla on suurem kui 50 mm. Nagu näha, ei muutu maksimaalse paindepinge või paindemomendi asukohta märkimisväärselt. Samas on jää purustamiseks vajalik jõud umbes neljandiku võrra väiksem lihtsustatud lahendist.


Läbipaine [mm]
x-koordinaat [m]
Analüütiline
Numbriline (LEM)
Numbriline (LEM) arvestades jää veealla surumist
Pinge [MPa]
x-koordinaat [m]
Analüütiline
Numbriline (LEM)
Numbriline (LEM) arvestades jää veealla surumist

2 Lineaaralgebra

2.1. Kompleksarvud, kvaterioonid

Ül 2.1. Konsooltala on ühest otsast jäigalt kinnitatud ja koormatud kahe koondjõuga $\mathbf{F}_1$ ning $\mathbf{F}_2$ (vt joonis)



Jõudude suurused on $F_1 = 12\,\mathrm{kN}$ ja $F_2 = 8\,\mathrm{kN}$. Leida jõusüsteemi poolt punktis O rakendatav resultantjõud ja moment.

Lahendus. Esitame jõuvektorid kompleksarvudena, mille projektsioon x-teljele on kompleksarvu reaalosa ja projektsioon y-teljele on kompleksarvu imaginaarosa:

$$F_{1x} = 12\,\cos 30^\circ = 6\sqrt{3} = 10,39\,\mathrm{kN}, \qquad F_{2x} = 0,00\,\mathrm{kN},$$
$$F_{1y} = 12\,\sin 30^\circ = 6,00\,\mathrm{kN}, \qquad F_{2y} = 8,00\,\mathrm{kN},$$

millest

$$\mathbf{F}_1 = 10,39 + 6,00\,\mathrm{i}, \qquad \mathbf{F}_2 = 0,00 + 8,00\,\mathrm{i}.$$

Kompleksarvudena saame esitada ka jõudude rakenduspunktid:

$$\mathbf{r}_1 = 2 + 0,3\,\mathrm{i} \quad \text{ja} \quad \mathbf{r}_2 = 4 + 0,0\,\mathrm{i}.$$

Resultantjõud $\mathbf{F}_0$ avaldub kompleksarvude summana:

$$\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 10.39 + 14,00\,\mathrm{i}.$$

Siis resultanjõu moodul on $|\mathbf{F}_0| = \sqrt{10,39^2 + 14,00^2} = 17,44\,\mathrm{kN}$ ja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga

$$\theta = \arctan\left(\frac{14,00}{10,39}\right) = 53,43^\circ.$$

Summaarse momendi arvutamiseks kasutame valemit:

$$M_O = \mathrm{Im}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}),$$

kus $\mathrm{Im}(x + y\,\mathrm{i}) = y$ on kompleksarvu $z = x + y\,\mathrm{i}$ imaginaarosa.

Jõu momendid punkti O suhtes on:

$$M_{O1} = \mathrm{Im}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}_1) = 2,00 \cdot 6,00 + 0,3 \cdot 10,39 = 15,12\,\mathrm{kNm},$$

$$M_{O2} = \mathrm{Im}(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}_2) = 4,00 \cdot 8,00 + 0,0 \cdot 0,00 = 32,00\,\mathrm{kNm}.$$

Kahe momendi summa on summaarne moment

$$M_O = M_{O1} + M_{O2} = 15,12 + 32,00 = 47,12\,\mathrm{kNm}.$$

Vastus: Resultantjõud $|\mathbf{F}_0| = 17,44\,\mathrm{kN}$, summaarne moment $M_O = 47,12\,\mathrm{kNm}$.

Ül 2.2. Näidata, et (lineaarse konstantsete kordajatega) diferentsiaalvõrrandi lahend

$$y = y(x) = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x},$$

kus C_1 ja C_2 on ükskõik millised konstandid ja a ning b on teadaolevad arvud, on esitatav ka kujul

$$y = C_3 e^{ax} \cos bx + C_4 e^{ax} \sin bx,$$

kus C_3 ja C_4 võivad olla ükskõik millised konstandid.

Lahendus. Lahendi saame esitada kujul

$$y = C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a+ib)x} = e^{ax}\left(C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx}\right) \tag{2.1}$$

Kasutades Euleri valemit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, saame teisendada

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \sin(bx)$$

ja

$$e^{-ibx} = \cos(-bx) + i\sin(-bx).$$

Kuna koosinus on paarisfunktsioon, siis $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$. Siinus on paaritu funktsioon, seetõttu $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$. Seega

$$e^{-ibx} = \cos(-bx) + i\sin(-bx) = \cos(bx) - i\sin(bx).$$

Kokku saame asendada

$$\begin{aligned} C_1e^{ibx} + C_2e^{-ibx} &= C_1(\cos(bx) + i\sin(bx)) + C_2(\cos(bx) - i\sin(bx)) = \\ &= C_1\cos(bx) + iC_1\sin(bx) + C_2\cos(bx) - iC_2\sin(bx) = \\ &= (C_1 + C_2)\cos(bx) + i(C_1 - C_2)\sin(bx) \end{aligned}$$

Tähistame $C_3 = C_1 + C_2$ ja $C_4 = i(C_1 - C_2)$. Kasutades uusi konstante, saame esitada

$$C_1e^{ibx} + C_2e^{-ibx} = C_3\cos(bx) + C_4\sin(bx) \tag{2.2}$$

Kuna C_1 ja C_2 võivad olla suvalised konstandid, siis ka C_3 ja C_4 võivad olla suvalised konstandid. Asendades tulemuse võrrandist (2.2) võrrandisse (2.1) saamegi vajaliku tulemuse:

$$y = e^{ax}\big(C_3\cos(bx) + C_4\sin(bx)\big) = C_3e^{ax}\cos bx + C_4e^{ax}\sin bx.$$

Ül 2.3. Harmoonilist võnkumist kirjeldab järgmine funktsioon:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

kus t on aeg, A on võnkumise amplituud, ω on nurksagedus ja ϕ on algfaas. Kasutades kompleksset amplituudi on võimalik viia amplituud ja algfaas ühe mütsi alla kokku.
Selleks tuleb täiendada võnkumisfunktsiooni liidetavaga $iy(t)$, kus i on imaginaarühik ja $y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Tulemuseks on järgmine funktsioon:

$$\mathbf{x}(t) = x(t) + iy(t) = A\left[\sin(\omega t + \phi) + i\cos(\omega t + \phi)\right].$$

Näidata, et parameetripaaridele $(A, \phi) = (i, 0)$ ja $(A, \phi) = (1, -\frac{\pi}{2})$ vastavad võnkumisfunktsioonid langevad kokku, st kehtib valem

$$i\left[\sin(\omega t) + i\cos(\omega t)\right] = \sin(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) + i\cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2}).$$

Teiste sõnadega: amplituud i teisendub algfaasiks $-\frac{\pi}{2}$.

Lahendus. Elementaarsed arvutused kasutades trigonomeetria valemeid ja valemit $i^2 = -1$.

Ül 2.4. Tala külge on kinnitatud masin, mis põhjustab perioodilist koormust sagedusel $\omega = 10$ rad/s. Talale mõjuv dünaamiline jõud on antud komplekskujul

$$F(t) = Re(\hat{F}e^{i\omega t}), \hat{F} = 200e^{i\frac{\pi}{3}}N.$$

Tala jäikus on $k = 5000$ N/m ja sumbuvustegur on $c = 100$ Ns/m. Leia:

1) tala siirde kompleksne amplituud, kasutades siirde arvutamise võrrandit
$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{k - \omega^2 m + i\omega c},$$
milles masina mass $m = 5$ kg;

2) arvuta siirde amplituud ja faasinihe võrreldes jõuga;

3) kirjelda, kuidas mõjutab sumbuvus siiret ja faasinihet.

Lahendus. **1)** Arvutame dünaamilise jäikuse

$$k - \omega m + i\omega c = 5000 - 10^2 \cdot 5 + i \cdot 10 \cdot 100 = 4500 + 1000i.$$

Avaldame jõu komplekskuju komponentidena

$$\hat{F} = 200e^{i\frac{\pi}{3}} = 200 \cdot (cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi}{3}) = 200 \cdot (0.5 + 0.866 \cdot i) = 100 + 173.2i.$$

Siirde leidmiseks jagame kompleksarvud

$$\hat{x} = \frac{100 + 173.2i}{4500 + 1000i} = \frac{100 + 173.2i}{4500 + 1000i} \cdot \frac{4500 - 1000i}{4500 - 1000i} = \frac{623200 + 679400i}{21250000} = 0.0293 + 0.032i.$$

2) Siirde amplituud on

$$|\hat{x}| = \sqrt{0.0293^2 + 0.032^2} = 0.0434m.$$

Siirde faas on

$$\phi_x = arctan\frac{0.032}{0.0293} = 47.5^\circ.$$

Jõu faas on

$$\phi_F = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Siirde faasinihe jõu suhtes on

$$\phi_x - \phi_F = 47.5^\circ - 60^\circ = -12.5^\circ$$

ehk siire jääb jõust faasi osas maha 12.5°.

3) Arvutame siirde, kui sumbuvus on null

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{k - \omega^2 m} = \frac{200 e^{i\frac{\pi}{3}}}{5000 - 10^2 \cdot 5} = 0.0444 e^{i\frac{\pi}{3}},$$

Näeme, et siirde amplituud on suurem, kui sumbuva võnkumise oma ning siire ja jõud on samas faasis. Sumbuvus põhjustab siirde vähenemise ja faasinihke siirde ja jõu vahel.

Ül 2.5. Arvutage kvaternioon q, mille abil saab vektori $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ *pöörata* vektorile $\mathbf{v} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ rakendades Rodriguese valemit $\mathbf{v}_\bullet = q\mathbf{u}_\bullet q^{-1}$. Siin $\mathbf{v}_\bullet$ ja $\mathbf{u}_\bullet$ tähistavad vektoritele $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u}$ vastavaid puhtvektorkvaternioone

$$\mathbf{u}_\bullet = \frac{\sqrt{2}}{2} i - \frac{\sqrt{2}}{2} k \quad \text{ja} \quad \mathbf{v}_\bullet = \frac{\sqrt{2}}{2} j + \frac{\sqrt{2}}{2} k.$$

Kirjutage välja pöördemaatriks R.

Lahendus. Otsitav kvaternioon q on kujul

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(n_x i + n_y j + n_z k),$$

kus $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ on pööramistelje sihiline ühikvektor selliselt, et $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}$ moodustavad parema käe kolmiku ning θ on vektorite $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ vaheline nurk. Ilmne, et $\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|}\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Saame

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Järgmiseks leiame vektorite $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u}$ vahelise nurga

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = -\frac{1}{2}$$

ehk $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Järelikult otsitav kvaternioon on

$$q = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} i - \frac{\sqrt{3}}{3} j + \frac{\sqrt{3}}{3} k\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} j + \frac{1}{2} k.$$

Vastav pöördemaatriks on

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Maatriksid, astak, determinandid

Ül 2.6. Ehituskontserni neli ettevõtet ostsid toorainet, mille kogused tonnides on kirjutatud maatriksi A veergudesse

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 2,0 & 1,5 & 1.0 \\ 1,5 & 0 & 2,5 & 1,5 \\ 0,5 & 1,0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix}.$$

Maatriksis H on ostetud toorainete ühe kilogrammi hind eurodes

$$H = \begin{bmatrix} 0,6 & 1,0 & 0,8 \end{bmatrix} \qquad \text{ning} \qquad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Leida korrutised HA, AY ja HAY ja selgitada nende sisu.

Lahendus. Kuna maatriks A kirjeldab ostetud tooraine koguseid tonnides, siis teisendame hinnamaatriksi H elemendid ühe tonni hinnale, seega

$$H = \begin{bmatrix} 600 & 1000 & 800 \end{bmatrix}.$$

Arvutame esimese korrutise

$$HA = \begin{bmatrix} 600 & 1000 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 & 2,0 & 1,5 & 1.0 \\ 1,5 & 0 & 2,5 & 1,5 \\ 0,5 & 1,0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2500 & 2000 & 3400 & 4100 \end{bmatrix}.$$

Maatriksi HA elementideks on kulutused, mida tegi iga ettevõte tooraine ostmiseks.

Arvutame teise korrutise

$$AY = \begin{bmatrix} 1,0 & 2,0 & 1,5 & 1.0 \\ 1,5 & 0 & 2,5 & 1,5 \\ 0,5 & 1,0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.5 \\ 4.0 \end{bmatrix}.$$

Maatriksi AY elementideks on kontserni ettevõtetele müüdud toorainete kogused tonnides.

Arvutame kolmanda korrutise

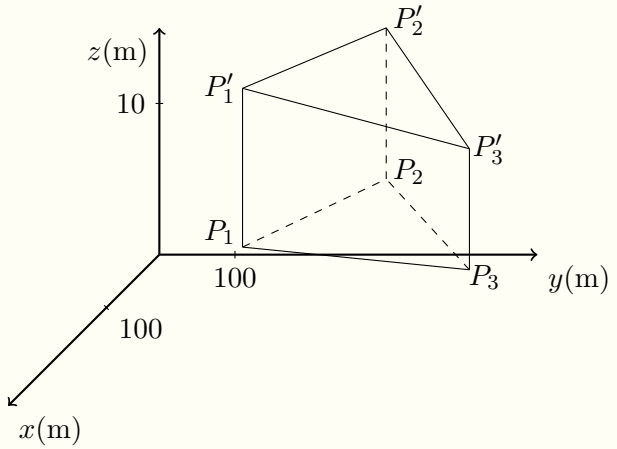
$$HAY = H(AY) = \begin{bmatrix} 600 & 1000 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 & 2,0 & 1,5 & 1.0 \\ 1,5 & 0 & 2,5 & 1,5 \\ 0,5 & 1,0 & 0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 600 & 1000 & 800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.5 \\ 4.0 \end{bmatrix} = 12\,000.$$

Maatriksi HAY ainsaks elemendiks on kontserni kogukulu eurodes, mis tehti tooraine ostmiseks.

Vastus: HA iga ettevõtte kulutus tooraine ostmiseks, AY ettevõttele müüdud tooraine kogused, HAY kontserni kogukulu tooraine ostmiseks.

Ül 2.7. Laugesse mäekülge projekteeritakse liivakarjääri. Karjäärist saadav liivakogus moodustab kaldu lõigatud püstprisma, mille põhi on hulktahukas. Antud prisma on külgedega paralleelsete tasanditega tükeldatav lõigatud kolmnurkseteks prismadeks (viistahukateks) ja liivakoguse ruumala on leitav kui saadud viistahukate ruumalade summa. Üks mainitud viistahukatest on kujutatud joonisel.



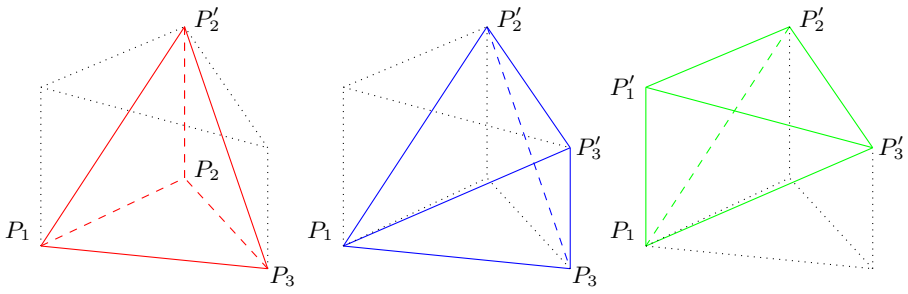
Tippude koordinaadid on järgmised:

$$P_1'(-10, 100, 11) \quad P_2'(-223, 290, 10) \quad P_3'(18, 400, 8)$$
$$P_1(-10, 100, 0) \quad P_2(-223, 290, 0) \quad P_3(18, 400, 0).$$

Leida viistahuka ruumala.

Lahendus. Vaadeldav viistahukas on tükeldatav kolmeks tetraeedriks allpoolnäidatud

viisil:



On teada, et tippudega $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ ja $D(d_1, d_2, d_3)$ määratud tetraeedri ruumala avaldub valemiga

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}\right|.$$

Seda valemit kasutades saab arvutada punase, sinise ja rohelise tetraeedri ruumalad, mis tuleb seejärel summeerida.

Punase, sinise ja rohelise tetraeedri ruumalad avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} V_{\text{punane}} &= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 & 0 \\ 1 & -223 & 290 & 0 \\ 1 & 18 & 400 & 0 \\ 1 & -223 & 290 & 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{10}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 \\ 1 & -223 & 290 \\ 1 & 18 & 400 \end{pmatrix}\right| = \\ &= \frac{10}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 \\ 1 & -223 & 290 \\ 0 & 28 & 300 \end{pmatrix}\right| = \frac{10}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 \\ 0 & -213 & 190 \\ 0 & 28 & 300 \end{pmatrix}\right| = \\ &= \frac{10}{6}|(-213)\cdot 300 - 28\cdot 190| = \frac{10}{6}\cdot 69220 \approx 115367, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{sinine}} &= \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 & 0 \\ 1 & 18 & 400 & 0 \\ 1 & 18 & 400 & 8 \\ 1 & -223 & 290 & 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 & 0 \\ 1 & 18 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -223 & 290 & 10 \end{pmatrix}\right| = \\ &= \frac{8}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 \\ 1 & 18 & 400 \\ 1 & -223 & 290 \end{pmatrix}\right| = \frac{8}{6}\cdot 69220 \approx 92293, \end{aligned}$$

$$V_{\text{roheline}} = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 & 0 \\ 1 & -10 & 100 & 11 \\ 1 & 18 & 400 & 8 \\ 1 & -223 & 290 & 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 1 & 18 & 400 & 8 \\ 1 & -223 & 290 & 10 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{11}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -10 & 100 \\ 1 & 18 & 400 \\ 1 & -223 & 290 \end{pmatrix}\right| = \frac{11}{6}\cdot 69220 \approx 126903.$$

Seega

$$V = V_{\text{punane}} + V_{\text{sinine}} + V_{\text{roheline}} \approx 334560\,\text{m}^3.$$

Vastus: Viistahuka ruumala on $V \approx 334560\,\text{m}^3$.

Ül 2.8. Autorendifirmal on kolm filiaali kolmes linnas (näiteks Tallinn, Taru ja Pärnu). Klient võib rentida auto ükskõik millisest neist linnadest ja tagastada auto ükskõik millisesse neist kolmest asukohast. Statistiliselt on leitud, et Tallinnast renditud auto tagastatakse Tallinna tõenäosusega 0,8, Tartusse tõenäosusega 0,1 ning Pärnusse tõenäosega 0,1. Tartust renditud auto tagastatake Tartusse tõenäosusega 0,5, Tallinna tõenäosega 0,3 ning Pärnusse tõenäosusega 0,2. Pärnust renditud auto tagastatakse Pärnusse tõenäosusega 0,6, Tartusse tõenäosusega 0,2 ning Tallinna tõenäosusega 0,2.

a) Millise tõenäsosusega tagastatakse Pärnust renditud auto peale viiendat rentimist jälle Pärnusse?

b) Kui suure tõenäosusega tagastatakse esimesel korral Tallinnast renditud auto peale viiendat rentimist Pärnusse?

Lahendus. Ülesande lahendamiseks kasutame Markovi ahelat. Süsteemil on lõplik arv olekuid. Süsteem peab olema täpselt ühes nendest olekutest. On teada üleminekute tõenäosused ühest olekust teise. Üleminekumaatriks peab olema selline, et iga veeru elementide summa võrdub ühega ning kõik elemendid on nulli ja ühe vahel.

Moodustame üleminekumaatriksi (tähistame selle A-ga)

renditud asukohast:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Tallinn} & \text{Tartu} & \text{Pärnu} \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \end{matrix}\right] \end{array} \begin{matrix} \\ \text{tagastatud Tallinna} \\ \text{tagastatud Tartusse} \\ \text{tagastatud Pärnusse} \end{matrix}$$

Süsteemi olekut kirjeldab üheveeruline olekuvektor, mille igaks elemendiks on tõenäosus, et süsteem asub just vastavas olekus. Kui algul on auto Pärnus, siis tõenäosusega 1 on auto Pärnus ja tõenäosustega 0 mujal.

a) Sellele algolukorrale vastab vektor

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{tõenäosus, et auto asub Tallinnas} \\ \text{tõenäosus, et auto asub Tartuss} \\ \text{tõenäosus, et auto asub Pärnuss} \end{array}$$

Peale esimest rentimist on olekuvektoriks $X_1 = AX_0$:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,6 \end{bmatrix},$$

st auto on Tallinnas tõenäosusega 0,2, Tartus tõenäosusega 0,2 ja Pärnus tõenäosusega 0,6. Peale teist rentimist on olekuvektoriks $X_2 = AX_1$:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,34 \\ 0,24 \\ 0,42 \end{bmatrix}$$

Analoogiliselt jätkates saame

$$X_3 = AX_2 = \begin{bmatrix} 0,428 \\ 0,238 \\ 0,334 \end{bmatrix}, X_4 = AX_3 = \begin{bmatrix} 0,4806 \\ 0,2286 \\ 0,2908 \end{bmatrix}, X_5 = AX_4 = \begin{bmatrix} 0,51122 \\ 0,22052 \\ 0,26826 \end{bmatrix}$$

Seega on peale viiendat rentimist auto Pärnus tõenäosusega ligikaudu 0,268.

Kui jätkata, siis saame, et täpsusega 6 kohta peale koma

$$X_{10} = \begin{bmatrix} 0,549415 \\ 0,207771 \\ 0,242815 \end{bmatrix}, \quad X_{20} = \begin{bmatrix} 0,551717 \\ 0,206899 \\ 0,241384 \end{bmatrix}, \quad X_{30} = \begin{bmatrix} 0,551724 \\ 0,206897 \\ 0,241379 \end{bmatrix} = X_{40}$$

b) Sellele algolukorrale vastab vektor

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

siis saame

$$X_5 = \begin{bmatrix} 0,57599 \\ 0,19747 \\ 0,22654 \end{bmatrix},$$

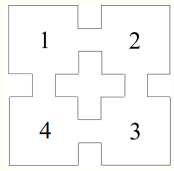
st sel juhul on auti peale viiendat rentimist tagastatud Pärnusse tõenäosusega 0,227. Jätkates näeme, et

$$X_{10} = \begin{bmatrix} 0,553079 \\ 0,206379 \\ 0,240543 \end{bmatrix}, \quad X_{20} = \begin{bmatrix} 0,551728 \\ 0,206895 \\ 0,241377 \end{bmatrix}, \quad X_{30} = \begin{bmatrix} 0,551724 \\ 0,206897 \\ 0,241379 \end{bmatrix} = X_{40}$$

See tähendab, et pika aja möödudes ei mõjuta algolukord enam tulemust.

Vastus: **a)** Peale viiendat rentimist on Pärnust renditud auto tagasi Pärnus tõenäosusega 0,268.
b) Peale viiendat rentimist on Tallinnast renditud auto tagastatud Pärnusse tõenäosusega 0,227.

Ül 2.9. Hiir asub labürindis, mis koosneb neljast kambrist. Algselt on hiir kambris nr.1. Igal sammul võib hiir jääda paigale või liikuda ühte kõrvalkambrisse. Hiir valib liikumissuuna juhuslikult. Loeme, et võrdse tõenäosusega võib ta valida ükskõik millise võimaluse. Kambrist nr.1 võib ta lisaks paigalejäämisele liikuda kas kambrisse 2 või 4, kambrist nr.2 võib liikuda kambrisse nr.1 või nr.3 jne.



Lahendus. Süsteemil on lõplik arv olekuid. Süsteem peab olema täpselt ühes nendest olekutest. On teada üleminekute tõenäosused ühest olekust teise. Üleminekumaatriks peab olema selline, et iga veeru elementide summa võrdub ühega ning kõik elemendid on nulli ja ühe vahel.

Kui tähistada üleminekumaatriksit A-ga ja olekuvektorit X_i, siis sõltuvalt üleminekumaatriksist võib süsteemil olla või mitte olla tasakaaluasend, mille korral

$$AX_i = X_{i+1}$$

Üleminekumaatriks on

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

Kui algolekuks on

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{siis} \quad X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix},$$

$$X_3 \approx \begin{bmatrix} 0,259259 \\ 0,259259 \\ 0,222222 \\ 0,259259 \end{bmatrix}, \quad X_4 \approx \begin{bmatrix} 0,259259 \\ 0,246914 \\ 0,246914 \\ 0,246914 \end{bmatrix}, \quad X_5 \approx \begin{bmatrix} 0,251029 \\ 0,251029 \\ 0,246914 \\ 0,251029 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

ja $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^T$ korral kehtib $AX = X$.

Vastus: Süsteemil on tasakaaluasend.

Ül 2.10. Hiir asub labürindis, mis koosneb neljast kambrist (vt ülesanne 2.9). Algselt on hiir kambris nr.1. Igal sammul peab hiir liikuma ühte kõrvalkambrisse. Hiir valib liikumissuuna juhuslikult. Loeme, et võrdse tõenäosusega võib valida ükskõik millise võimaluse. Kambrist nr.1 võib ta liikuda kas kambrisse 2 või 4, kambrist nr.2 võib liikuda kambrisse nr.1 või nr.3 jne.

Lahendus. Üleminekumaatriksiks on

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

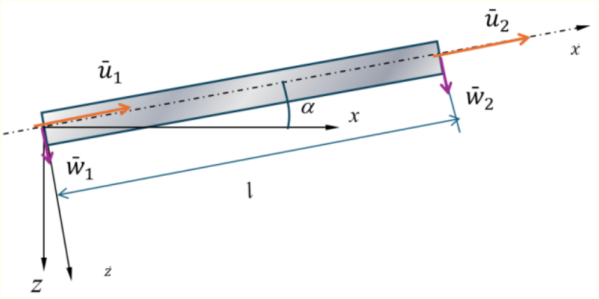
Kui algolekuks on

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{siis} \quad X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = AX_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad X_4 = AX_3 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{jne}$$

Vastus: Süsteemil tasakaaluasend puudub.

Ül 2.11. Varras 1-2 on pööratud horisontaaltelje x suhtes nurga α võrra. Varda pikitelg on $\bar{x}$ ja põiktelg $\bar{z}$. Varda sõlmede siirded on tähistatud vektoritega $\bar{\mathbf{u}}_i$ ja $\bar{\mathbf{w}}_i$



Selleks, et arvutada siirdeid xz-koordinaadistikus, kasutatakse järgmist maatrikskujul teisendust

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix}.$$

Arvuta siirete vektori

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,20 \\ -0,04 \\ -0,30 \end{bmatrix}$$

komponendid xz-teljestikus kui nurk 1) $\alpha = 0°$, 2) $\alpha = 90°$.

Lahendus. 1) Kui $\alpha = 0°$, siis on teisenduse maatriks

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on ühikmaatriks ja sellega korrutades esialgne maatriks ei muutu. Seega

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,20 \\ -0,04 \\ -0,30 \end{bmatrix}.$$

2) Kui $\alpha = 90^\circ$, siis on teisenduse maatriks

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seega

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01 \\ -0,20 \\ -0,04 \\ -0,30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,20 \\ -0,01 \\ -0,30 \\ 0,40 \end{bmatrix}.$$

Näeme, et xz-teljestikus siirded u ja w vahetasid kohad. Lisaks siire w vahetas märki kuna peale 90° pööret telg $\bar{x}$ on suunatud z-teljega vastassuunas.

Funktsioonide lineaarse sõltumatuse määramiseks võib kasutada Wronski determinanti: kui funktsioonid $f_1(x)$, $f_2(x)$,… ,$f_n(x)$ on $n-1$ korda pidavalt diferentseeruvad vahemikus $(-\infty;\infty)$ ja kui nende funktsioonide Wronski determinant

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ei ole vahemikus $(-\infty;\infty)$ samaselt null, siis on funktsioonid $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ lineaarselt sõltumatud.

Ül 2.12. Näidata, et kui $a \neq b$, siis funktsioonid $y_1 = \mathrm{e}^{ax}$ ja $y_2 = \mathrm{e}^{bx}$ on lineaarselt sõltumatud.

Lahendus. Leiame tuletised

$$y_1' = a\mathrm{e}^{ax} \quad \text{ja} \quad y_2' = b\mathrm{e}^{ax}$$

ning moodustame ja arvutame Wronski determinandi:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{ax} & \mathrm{e}^{bx} \\ a\mathrm{e}^{ax} & b\mathrm{e}^{bx} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{ax} \cdot b\mathrm{e}^{bx} - e^{bx} \cdot a\mathrm{e}^{ax} = \mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{bx}(b-a)$$

Kui $b \neq a$, siis viimane tegur ei ole null. Esimesed tegurid on eksponendi väärtused, mis on alati positiivsed. Seega on Wronski determinandi väärtus nullist erinev ja funktsioonid lineaarselt sõltumatud.

Vastus: Funktsioonid $y_1 = \mathrm{e}^{\,ax}$ ja $y_2 = \mathrm{e}^{\,bx}$ on lineaarselt sõltumatud.

Ül 2.13. Näidata, et kui $b \neq 0$, siis funktsioonid $y_1 = \cos(bx)$ ja $y_2 = \sin(bx)$ on lineaarselt sõltumatud.

Lahendus. Leiame tuletised

$$y_1' = -b\sin(bx) \quad \text{ja} \quad y_2' = b\cos(bx)$$

ning moodustame Wronski determinandi (vt ülesanne 2.12):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(bx) & \sin(bx) \\ -b\sin(bx) & b\cos(bx) \end{vmatrix}$$

ja arvutame determinandi väärtuse:

$$= \cos(bx)\cdot b\cos(bx) - \sin(bx)\cdot(-b\sin(bx)) = b\cos^2(bx) + b\sin^2(bx)$$

$$= b(\cos^2(bx) + \sin^2(bx)) = b$$

Kui $b \neq 0$, siis on Wronski determinandi väärtus nullist erinev ja funktsioonid lineaarselt sõltumatud.

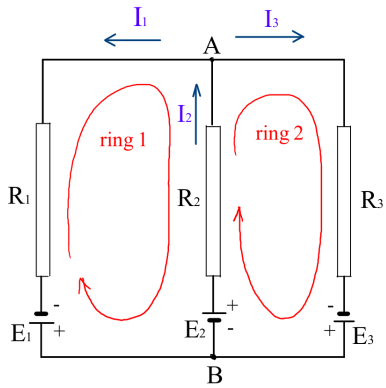
Vastus: Funktsioonid $y_1 = \cos(bx)$ ja $y_2 = \sin(bx)$ on lineaarselt sõltumatud.

Kirchhoffi reeglite kasutamine

Lihtsamad vooluringid koosnevad kahte tüüpi elementidest: vooluallikatest ja takistitest. Tavaliselt on ülesanne selline, et on teada takistite takistused ja vooluallikate elektromotoorjõud ning tuleb leida elektrivool igas vooluringi osas. Ülesanne võib olla ka teistmoodi sõnastatud. Kuna pinge, voolu ja takistuse vahel kehtivad kindlad seosed, siis saab koostada võrrandisüsteemi ja selle abil leida tundmatute väärtused.
Võrrandisüsteemi võrrandite koostamisel kasutatavad seadused:

1. Ohmi seadus: pingelangus igal takistil on seda takistit läbiv vool korda takistus. Igal takistil kehtib $E = IR$.
2. Kirchhoffi vooluseadus: igas punktis sissetulevate voolude summa võrdub sellest punktist väljuvate voolude summaga.
3. Kirchhoffi pingeseadus: igas suletud vooluringis on pingelanguste summa null.

Ül 2.14. On antud takistite takistused R_1, R_2, R_3 ja elektormotoorjõud E_1 ja E_2. On vaja leida selline E_2, et voolutugevus I_2 oleks etteantud väärtusega (vt joonis 2.1).



Joonis 2.1: Vooluring

Lahendus. Sõlmedes saame Kirchoffi esimese reegli põhjal

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

Kirchhoffi teise reegli põhjal saame vooluringis 1

$$-I_1R_1 - I_2R_2 = -E_1 - E_2,$$

vooluringis 2 saame

$$I_3R_3 + I_2R_2 = E_3 + E_2.$$

Esitame võrrandid kujul, kus tundmatud on ühel pool ja teadaolevad suurused teisel pool võrdusmärki. Kokku saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} -I_1 - I_3 = -I_2, \\ -R_1I_1 + E_2 = I_2R_2 - E_1, \\ R_3I_3 - E_2 = E_3 - I_2R_2. \end{cases}$$

Kui võtta algandmeteks $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 8V$, $E_3 = 5V$, $I_2 = 1A$ ja asendada need võrranditesse, siis saame kokku lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} -1I_1 - I_3 = -1, \\ -2I_1 + E_2 = 1 \cdot 4 - 8 = -4, \\ 3I_3 - E_2 = 5 - 1 \cdot 4 = 1, \end{cases}$$

Kuna on vaja ainult ühe tundmatu väärtust, siis selle võime leida Crameri valemite abil

$$E_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{5} = -1,6V.$$

Kuna E_2 jaoks saime negatiivse väärtuse, siis E_2 suund tuleb võtta vastupidine joonisel 2.1 kujutatule.

Ül 2.15. Leidke ellipsi

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqslant 1 \tag{2.3}$$

pindala, kus $a > 0$ ja $ac > b^2$.

Lahendus. Teisendame vasakul pool olevat avaldist

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}y\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}y\right)^2 =$$
$$= u^2 + v^2 \leqslant 1,$$

kus

$$u = \sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}y,$$
$$v = \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}y.$$

Tähistame

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}. \end{bmatrix}$$

Kuna

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

siis

$$S_{uv} = \det(A) S_{xy} = \pi$$

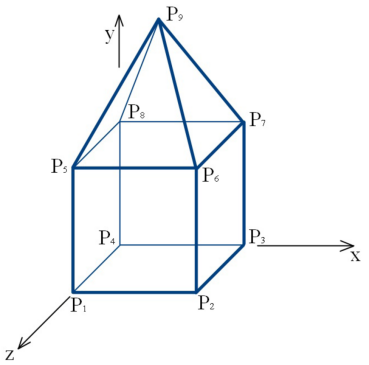
ehk

$$S_{xy} = \frac{\pi}{\det(A)} = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

Vastus: Võrrandiga (2.3) antud ellipsi pindala on $S_{xy} = \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$.

2.2.1. Kolmemõõtmelise keha esitamine kahemõõtmelisel joonisel

Tahame visualiseerida kolmemõõmelist keha esitades kahemõõtmelisel joonisel (näiteks arvutiekraanil) selle erinevaid vaateid. Meie poolt vaadeldav keha on selline, et teda on võimalik kujutada lõpliku arvu sirglõikude abil. Näiteks selline, nagu kujutatud joonisel.



Valime koordinaatsüsteemi nii, et xy-tasand ühtiks arvutiekraani tasandiga. Seega vaatleja näeb ainult meie keha projektsiooni xy-tasandile.
Meil peavad olema teada tippude koordinaadid ning info selle kohta, millised tipud peavad olema sirglõiguga ühendatud. Meie näites olgu teada tippude koordinaadid

$$\begin{array}{llll} P_1(0;0;1) & P_2(1;0;1) & P_3(1;0;0) & P_4(0;0;0) \\ P_5(0;1;1) & P_6(1;1;1) & P_7(1;1;0) & P_1(0;1;0) \\ P_9(0,5;2;0,5) & & & \end{array}$$

ning sirglõigud peavad ühendama punkte

$$\begin{array}{llll} P_1 \leftrightarrow P_2 & P_2 \leftrightarrow P_3 & P_3 \leftrightarrow P_4 & P_4 \leftrightarrow P_1 \\ P_1 \leftrightarrow P_5 & P_2 \leftrightarrow P_6 & P_3 \leftrightarrow P_7 & P_4 \leftrightarrow P_8 \\ P_5 \leftrightarrow P_6 & P_6 \leftrightarrow P_7 & P_7 \leftrightarrow P_8 & P_8 \leftrightarrow P_5 \\ P_5 \leftrightarrow P_9 & P_6 \leftrightarrow P_9 & P_7 \leftrightarrow P_9 & P_8 \leftrightarrow P_9 \end{array}$$

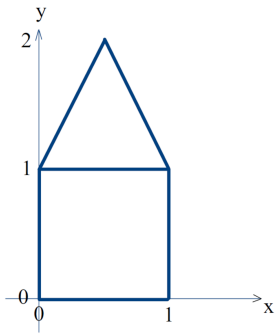
Teisendamiseks konstrueerime tippude koordinaatide maatriksi. Kui tippe on n, siis saame $3 \times n$-maatriksi

$$K = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix},$$

mis meie näite korral on

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Projekteerimisel xy-tasandile näeme sellist pilti.



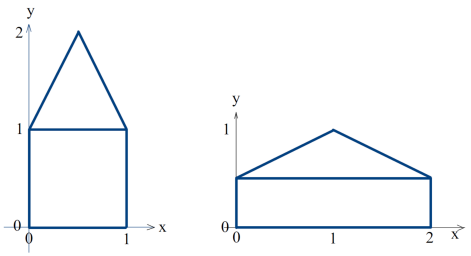
Projekteerimisel kasutame ainult x- ja$y$-koordinaate. Kuid teisendamiseks on vaja teada ka kõigi punktide z-koordinaate.
Kui tahame oma keha vaadata erinevatest punktidest, siis peame koordinaate teisendama. Lineaarteisendused on saadavad järgmiste teisenduste järjest rakendamise tulemusel.

Suurendus või vähendus

Suurendamisel või vähendamisel peame muutma mõõtkava koordinaattelgedel. Kui suurendama või vähendame kõigi suundades ühtmoodi, siis tuleb koordinaatide maatriksit korrutada c korda ühikmaatriksiga. Kui tahame telgedel mõõtkava muuta erinevalt, siis sellele vastab korrutamine maatriksiga

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Näiteks kui valime $\alpha = 2$, $\beta = 0,5$ ja $\gamma = 1,2$, siis näeme peale venitust ja projekteerimist xy-tasandil parempoolset pilti:



Paralleellüke

Kui tahame pilti nihutada, siis tuleb vaadet muuta nii, et iga punkt K_i, mille koordinaadid olid $(x_i; y_i; z_i)$ muutub uueks punktiks K_i' koordinaatidega

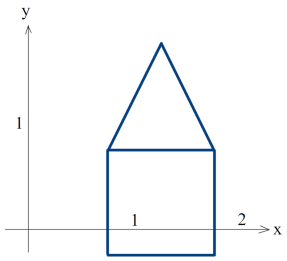
$(x_i + x_0; y_i + y_0; z_i + z_0)$. Defineerine uue $3 \times n$-maatriksi

$$L = \begin{bmatrix} x_0 & x_0 & \dots & x_0 \\ y_0 & y_0 & \dots & y_0 \\ z_0 & z_0 & \dots & z_0 \end{bmatrix}$$

Paraleellükke korral teiseb koordinaatide maatriks kui kahe maatriksi summa:

$$K' = K + L$$

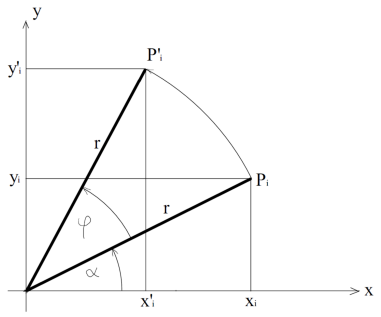
Näiteks kui nihutame algset joonist nii, et $x_0 = 0,8$, $y_0 = -0,2$, $z_0 = 0,5$, siis näeme uut pilti nii:



Pööre

Vaatleme algul pööret ümber ühe koordinaattelje.
Olgu punkti P_i koordinaadid $(x_i; y_i; z_i)$ esitatavad silindriliste koordinaatidena (xy-tasandil polaarkoordinaatidena)

$$\begin{cases} x_i = r\cos\alpha, \\ y_i = r\sin\alpha, \\ z_i = z_i. \end{cases}$$



Pööramisel ümber z-telje nurga φ võrra vastupäeva teisenevad punkti P_i koordinaadid $(x_i; y_i; z_i)$ koordinaatideks $(x_i'; y_i', z_i')$. mis on leitavad kui

$$\begin{cases} x_i' = r\cos(\alpha+\varphi) = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi = x_i\cos\varphi - y_i\sin\varphi, \\ y_i' = r\sin(\alpha+\varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi = x_i\sin\varphi + y_i\cos\varphi, \\ z_i' = z_i \end{cases}$$

Maatrikskujul on see

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ z_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

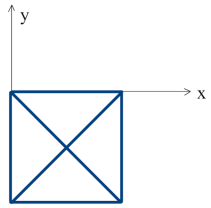
Ehk

$$K' = R_z K, \quad \text{kus} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

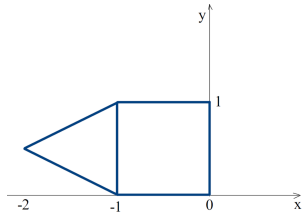
Pöördel ümber x-ja y-telje tuleb uute koordinaatide saamiseks koordinaate korrutada vastavalt pöördemaatriksitega

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Näiteks pöörates ümber x-telje 90°, näeme tulemusena sellist pilti:



Pöörates ümber z-telje 90°, on pilt selline:



Pöörates keha järjest ümber erinevate telgede, on võimalik moodustada erinevaid vaateid.

Ül 2.16. Leida keha K (vt 2.4) vaade, mis on saadud nii, et kõigepealt pöörame keha K ümber x-telje 30^o, seejärel ümber y-telje 70^o ja lõpuks ümber z-telje -30^o.

Lahendus. Pöördeid ümber koordinaattelgedega kirjeldavad maatriksid:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}, \; R_y = \begin{bmatrix} \cos\frac{7\pi}{18} & 0 & -\sin\frac{7\pi}{18} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{7\pi}{18} & 0 & \cos\frac{7\pi}{18} \end{bmatrix}, \; R_z = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

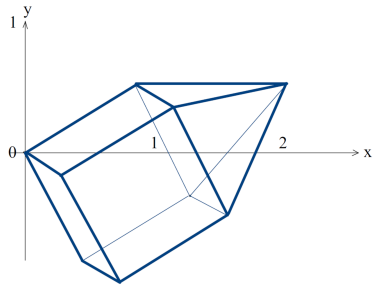
Kolme pöörde järjestikusel rakndamisel saame maatriksi. mille veergudeks on tippude uued koordinaadid

$$K' = R_z \cdot \big(R_y \cdot \big(R_x \cdot K\big)\big)$$

ehk

$$K' = \begin{bmatrix} 0.455 & 0.751 & 0.296 & 0. & 1.295 & 1.591 & 1.136 & 0.84 & 2.055 \\ -0.84 & -1.011 & -0.171 & 0. & -0.325 & -0.496 & 0.344 & 0.515 & 0.525 \\ 0.296 & -0.643 & -0.94 & 0. & 0.467 & -0.472 & -0.769 & 0.171 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Nende pöörete tulemuseks on keha vaade:



2.3. Lineaarsed, võrrandisüsteemid, Gaussi meetod, pseudolahend

Ül 2.17. Ehitusprojekti käigus tuleb valmistada 200 konstruktsioonielementi, mida toodetakse kolmes tehases: A, B ja C. Leia toodetavate elementide arv igas tehases, kui tootmise tööaeg on kokku 770 tundi. Seejuures on tehase A kolmekordne toodangu maht v~ordne tehaste B ja C toodangu summaga. Tehase A tootmise kiirus on 3 elementi tunnis, tehasel B 4 elementi tunnis ja tehasel C 5 elementi tunnis. Mitu elementi toodab iga tehas?

Lahendus. Ülesannet kirjeldab järgmine võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} x + y + z = 200, \\ 3x - y - z = 0, \\ 3x + 4y + 5z = 770. \end{cases}$$

Liidame esimese ja teise võrrandi

$$x + y + z + 3x - y - z = 200 \quad \Rightarrow \quad 4x = 200 \quad \Rightarrow \quad x = 50.$$

Asenadame esismesse võrrandisse leitud x väärtuse

$$50 + y + z = 200 \quad \Rightarrow \quad y = 150 - z$$

Asendame kolmandasse võrrandisse $x = 5$ ja $y = 150 - z$

$$3 \cdot 50 + 4 \cdot (150 - z) + 5z = 770 \quad \Rightarrow \quad 750 + z = 770 \quad \Rightarrow \quad z = 20.$$

Seega $y = 130$.

Vastus: Tehastes A, B ja C tuleb valmistada vastavalt 50, 130 je 20 konstuktsioonielementi.

Ül 2.18. Ehitusel vajatakse 2200 m^3 liiva, 2000 m^3 peenkruusa ja 2800 m^3 jämekruusa. Neid on võimalik saada kolmest allikast. Tabelis on toodud allikatest saadava materjali koostis protsentides:

Allikas	Liiv %	Peenkruus %	Jämekruus %
1	50	30	20
2	30	40	30
3	20	20	60

Leida allikatest 1 - 3 võetavad optimaalsed materjali kogused, mis katavad ehituse vajadused.

Lahendus. Olgu x_1, x_2 ja x_3 vastavalt allikatest 1,2 ja 3 võetavad kogused. Nende leidmiseks tuleb lahendada järgmine lineaarne võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 = 2200, \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 = 2000, \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.6x_3 = 2800. \end{cases}$$

Korrutame kõiki süsteemi kuuluvaid võrrandid teguriga 10, kirjutame välja võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ja teisendame selle diagonaalkujule.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 22000 \\ 3 & 4 & 2 & 20000 \\ 2 & 3 & 6 & 28000 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2000 \\ 1 & 1 & -4 & -8000 \\ 2 & 3 & 6 & 28000 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ R_2 - R_3 \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -8000 \\ 2 & -1 & 0 & 2000 \\ 2 & 3 & 6 & 28000 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

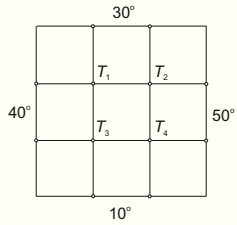
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -8000 \\ 0 & -3 & 8 & 18000 \\ 0 & 4 & 6 & 26000 \end{array}\right] \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_2 \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -8000 \\ 0 & 1 & 14 & 44000 \\ 0 & 4 & 6 & 26000 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ R_2 + R_3 \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -8000 \\ 0 & 1 & 14 & 44000 \\ 0 & 0 & -50 & -150000 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ R_3 - 4R_2 \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & -8000 \\ 0 & 1 & 14 & 44000 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\frac{1}{50} R_3 \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4000 \\ 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 + 4R_3 \\ R_2 - 14R_3 \end{matrix} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2000 \\ 0 & 1 & 0 & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Vastus: Allikatest võetavad materjali kogused on $x_1 = 2000\,\mathrm{m}^3$, $x_2 = 2000\,\mathrm{m}^3$, $x_3 = 3000\,\mathrm{m}^3$.

Ül 2.19. Ruudukujulise plaadi alus- ja pealispind on ideaalselt isoleeritud ning kogu soojusvahetus toimub ainult plaadi sisemuses. Temperatuur plaadi neljas servas on erinev. Plaadi sisepunktide temperatuuri hindamiseks moodustatakse korrapärane võrk (vt joonis) ja sisepunktiks oleva võrgu sõlme temperatuuri määramiseks kasutatakse reeglit, mille kohaselt temperatuur punktis on võrdne neljas naaberpunktis (vasakul, paremal, üleval ja all) oleva temperatuuri aritmeetilise keskmisega. Leida võrgu sõlmede T_1, T_2, T_3 ja T_4 temperatuur.



Lahendus. Koostame ülesandele vastava matemaatilise mudeli:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \tfrac{40+30+T_2+T_3}{4} \quad \Rightarrow \quad 4T_1 - T_2 - T_3 = 70\\
T_2 &= \tfrac{T_1+30+50+T_4}{4} \quad \Rightarrow \quad -T_1 + 4T_2 - T_4 = 80\\
T_3 &= \tfrac{40+T_1+T_4+10}{4} \quad \Rightarrow \quad -T_1 + 4T_3 - T_4 = 50\\
T_4 &= \tfrac{T_3+T_2+50+10}{4} \quad \Rightarrow \quad -T_2 - T_3 + 4T_4 = 60
\end{aligned}$$

Mudeliks on lineaarne võrrandisüsteem, mille laiendatud maatriks on:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 70\\ -1 & 4 & 0 & -1 & 80\\ -1 & 0 & 4 & -1 & 50\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 60 \end{array}\right].$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamiseks kasutame Gaussi meetodit.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 70\\ -1 & 4 & 0 & -1 & 80\\ -1 & 0 & 4 & -1 & 50\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 60 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & 0 & 1 & -80\\ 4 & -1 & -1 & 0 & 70\\ -1 & 0 & 4 & -1 & 50\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 60 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftarrow -R_2\\ R_2 \leftarrow R_1 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & 0 & 1 & -80\\ 0 & 15 & -1 & -4 & 390\\ 0 & -4 & 4 & 0 & -30\\ 0 & -1 & -1 & 4 & 60 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1\\ R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & 0 & 1 & -80\\ 0 & 1 & 1 & -4 & -60\\ 0 & -4 & 4 & 0 & -30\\ 0 & 15 & -1 & -4 & 390 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \leftarrow -R_4\\ \\ R_4 \leftarrow R_2 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 & -80 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & -270 \\ 0 & 0 & -16 & 56 & 1290 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 15R_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 & -80 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{135}{4} \\ 0 & 0 & -2 & 7 & \frac{645}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \leftarrow \frac{1}{8} R_3 \\ R_4 \leftarrow \frac{1}{8} R_4 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 & -80 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{135}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{375}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 \leftarrow R_4 + 2R_3 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 & -80 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{135}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{125}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 \leftarrow \frac{1}{3} R_4 \end{array}$$

Nüüd saame võrrandisüsteemi süsteemi maatriksi teisendada diagonaalkujule, so teisendada kõik peadiagonaali peal olevad elemendid nullideks.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 & -80 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{135}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{125}{4} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & -\frac{445}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 65 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{115}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{125}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - R_4 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 4R_4 \\ R_3 \leftarrow R_3 + 2R_4 \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 0 & -\frac{445}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{145}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{115}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{125}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{135}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{145}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{115}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{125}{4} \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + 4R_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Viimasest maatriksist saame vahetult leida temperatuurid võrgu sisepunktideks olevates sõlmedes:

$$T_1 = \frac{135}{4}, \quad T_2 = \frac{145}{5}, \quad T_3 = \frac{115}{4}, \quad T_4 = \frac{125}{4}$$

ehk

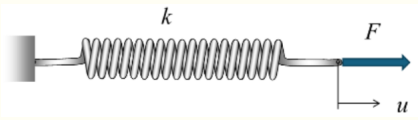
$$T_1 = 33,75, \quad T_2 = 36,25, \quad T_3 = 28,75, \quad T_4 = 31,25.$$

Vastus: Temperatuur sõlmedes on $T_1 = 33,75,\ T_2 = 36,25,\ T_3 = 28,75,\ T_4 = 31,25$.

Ül 2.20. Mehaanika üks olulisemaid seadusi on Hooke seadus, mille kohaselt elastse vedru jõud on võrdeline vedru pikkenemisega:

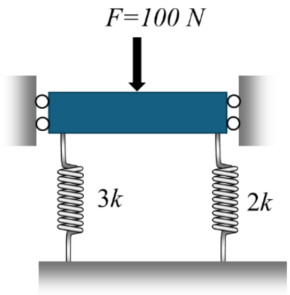
$$F = k\,u,$$

kus F on vedrule rakendatud jõud ja u on vedru pikenemine.



Hooke seadus

Kolvile on rakendatud jõud $F = 100\,\mathrm{N}$, mis surub kahte vedru, mille jäikused on vastavalt $3k$ ja $2k$ (vt joonis 2.2). Leida vedrudes tekkivate jõudude F_1 ja F_2 suurused. Kolvi kaalu võib hüljata.



Joonis 2.2: Kolb kahe vedruga

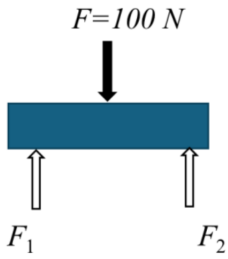
Lahendus. Kui jõud kasvab nullist kuni lõppväärtuseni $F = 100\,\mathrm{N}$, liigub kolb allapoole ning saavutab tasakaaluseisu, kus vedrude jõud F_1 ja F_2 tasakaalustavad jõu F (vt joonis 2.3).

Tasakaaluks on vajalik, et

$$F_1 + F_2 = 100.$$

Kuna mõlema vedru deformatsioon on võrdne, siis

$$\frac{F_1}{3k} = \frac{F_2}{2k} \qquad \text{ehk} \qquad 2F_1 - 3F_2 = 0.$$



Joonis 2.3: Kolvile mõjuvad jõud

Seega jõudude leidmiseks tuleb lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = 100, \\ 2F_1 - 3F_2 = 0. \end{cases}$$

Selle lahendamiseks korrutame teist võrrandit teguriga $-\frac{1}{2}$ ja liidame sellele esimese võrrandi (so Gaussi meeod ehk liitmisvõte)

$$\begin{cases} F_1 + F_2 = 100, \\ 2,5F_2 = 100. \end{cases}$$

Teisest võrrandist leiame, et $F_2 = 40\,\mathrm{N}$ ja asendades selle esimesse võrrandisse, saame $F_1 = 60\,\mathrm{N}$.

Vastus: Vedrudes tekkivad jõud on $F_1 = 60\,\mathrm{N}$ ja $F_2 = 40\,\mathrm{N}$.

Ül 2.21. Vaatame lihtsustatud olukorda, kus majandus koosneb kolmest harust: tööstus, põllumajandus ja teenused, mille toodangut tarbib avalik sektor. Kasutades Leontiefi[a] mudelit, saame selle kirja panna võrrandiga

$$X = CX + D, \tag{2.5}$$

kus $X = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ on vektor, mille elementideks on iga majandusharu toodang, et avalik sektor saaks tarbida $D = [d_1, d_2, d_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ ühikut. **Kõik ühikud väljendatakse rahas (näiteks eurodes)**. Maatriks $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ näitab majandusharude nn **sisetarbimist**, st kui palju toodangut kulub selleks, et toota avaliku sektori jaoks üks ühik (näiteks ühe euro tööstustoodangu tootmiseks avalikule sektorile kulutab tööstussektor c_{11} ühikut tööstustoodangut, c_{12} ühikut põllumajandustoodangut ja c_{13} ühikut teenuseid).

Leida toodangumahu vektor X, kui avaliku sektori vajadus $D = [50, 30, 20]^{\mathrm{T}}$ ja sisetarbimist näitav maatriks on

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

[a] Vassily Leontief – Vene-Ameerika majandusteadlane (1905– 1999), Nobeli majanduspreemia laureaat (1973).

Lahendus. Toodangu mahtude leidmiseks teisendame võrrandi (2.5) kujule

$$D = X - C\,X = (I_3 - C)X,$$

kus I_3 on 3-järku ühikmaatriks. Teisendatud võrrand on lineaarse võrrandisüsteemi maatrikskuju, mille lahend on

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 274 \\ 151 \\ 208 \end{bmatrix}$$

(siin ümardasime lähima täisarvuni).

Vastus: Avaliku sektori tarbimisvajaduse D rahuldamiseks peab majandusharude kogutoodang olema $X = [\,274,\ 151,\ 208\,]^{\mathrm{T}}$.

Ül 2.22. Ehitusinseneril, elektriinseneril ja mehaanikainseneril on igaühel oma projekteerimisfirma. Kuid kõik tellimused on nii keerulised, et lisaks oma teadmistele, tuleb iga kord ka osa tööst sisse osta. Selleks, et ehitusinsener saaks esitada arve 1 euro eest, peab ta tellima 10 sendi eest tööd elektriinsenerilt ja 30 sendi eest tööd mehaanikainsenerilt. Kui elektriinsener tahab esitada oma tööde eest 1-eurose arve, siis eelnevalt tuleb maksta 20 senti ehitusinsenerile ja 40 senti mehaanikainsenerile. Mehaanikainsener peab 1 euro eest teenuse müümiseks ostma 30 sendi eest ehituinseneri ja 40 sendi eest elektriinseneri teenuseid. Ühel nädalal esitatakse ehitusinsenerile väliseid tellimusi 500 euro eest, elektrinsenerile esitatakse tellimusi 600 euro eest ja mehaanikainsener saab väliseid tellimusi oma tööle 600 euro eest. Millise rahasumma väärtuses peab igaüks neist selle nädala jooksul töötama, et kõik välised nõudlused saaksid (täpselt) rahuldatud (vt ka ülesannet 2.21)?

Lahendus. Tähistame, et selle nädala jooksul on ehitusinseneri töö koguväärtuse x_1-ga, elektriinseneri töö koguväärtuse x_2-ga ja mehaanikainseneri töö koguväärtuse x_3-ga. Tundmatute vektori tähistame X-ga. Esitatud andmete põhjal on tarbimismaatriksiks C ja nõudlusmaatriksiks D vastavalt

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad D = \begin{bmatrix} 500 \\ 700 \\ 600 \end{bmatrix}.$$

Lineaarvõrrandisüsteemiks $(I - C)X = D$ on siis

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 \\ -0.1 & 1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 700 \\ 600 \end{bmatrix}$$

Vasakpoolsel maatriksil on olemas pöördmaatriks ja lahend on leitav kui

$$X = (I - C)^{-1} D = \frac{1}{347} \begin{bmatrix} 420 & 160 & 190 \\ 110 & 455 & 215 \\ 170 & 230 & 490 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 500 \\ 700 \\ 600 \end{bmatrix} = \frac{100}{347} \begin{bmatrix} 4360 \\ 5025 \\ 5400 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1256 \\ 1448 \\ 1556 \end{bmatrix}$$

Vastus: Ehitusinsener peab töötama ligikaudu 1256 euro eest, elektriinsener 1448 euro eest ja mehaanikainsener 1556 euro eest (vastused on ümardatud täiseurodeni).

Ül 2.23. Linnas on kolm kohalikku tööstust: kivisöekaevandus, elektrijaam ja raudtee. Selleks, et kaevandada 1 euro väärtuses kivisütt, peab kaevanduettevõte maksma 25 senti elektri eest ja 25 senti raudteetranspordi eest. Selleks, et toota 1 euro väärtuses elektrit, vajab elektrijaam 65 sendi eest kivisütt kütuseks, 5 sendi eest iseenda elektrit ja 5 sendi eest tuleb katta transpordikulusid. Et teenida 1 euro transpordi eest, peab raudtee-ettevõte kulutama 55 senti kivisöele ja 10 senti elektrile. Ühe kindla nädalal jooksul saab kaevandusettevõte kivisöele tellimuse maksumusega 50 000 eurot ning eletrijaam saab väljastpoolt linna tellimuse elektrile 25 000 euro väärtuses. Raudtee teenuseid väljastpoolt linna ei vajata. Kui palju peab igaüks neist ettevõtetest selle nädala jooksul tootma, et väline nõudlus täpselt rahuldada?[a]

[a] Näide õpikust Anton Rorres, „Elementary Linear Algebra".

Lahendus. Tähistame, et selle nädala jooksul on kivisöekaevanduse kogutoodangu väärtus x_1, elektrijaama kogutoodangu väärtus x_2 ja rautee-ettevõtte kogutoodangu väärtus x_3. Esitatud andmete põhjal on tarbimismaatriksiks

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}$$

ja nõudlusmaatriksiks

$$D = \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lineaarvõrrandisüsteemiks $(I - C)X = D$ on siis

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ -0.25 & -0.05 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Vasakpoolsel maatriksil on olemas pöördmaatriks ja lahend on leitav kui

$$X = (I - C)^{-1} D = \frac{1}{503} \begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102087 \\ 56163 \\ 28330 \end{bmatrix}.$$

Vastus: Kivisütt tuleb toota 102 087 euro eest, elektrit 56 163 euro eest ja raudtee-teenuseid vajatakse 28 330 euro eest.

Ül 2.24. Kolm vabakutselisena töötavat ehitusmeest (maaler, elektrik ja torumees) on otsustanud remontida kõigi kolme kodud. Igas kodud on vaja teha erinevaid töid. Nad lepivad kokku, et töötavad 10 päeva jooksul vastavalt järgmisele ajatabelile:

	maaler	elektrik	torumees
töötab maalri kodus	2	1	6
töötab elektriku kodus	4	5	1
töötab torumehe kodus	4	4	3

Et saada haiguskindlustus, peavad nad maksma üksteisele mõistlikku päevapalka. Palka tuleb maksta ka iseendale oma kodus tehtava töö eest. Tavaline päevapalk on kõigil kolmel ligikaudu 100 eurot, kuid nad lepivad kokku, et kohandavad oma palkasid selliselt, et kõigis kodudes saaks remont tehtud nii, et igaühe väljaminekud ja sissetulekud oleksid nullis. Millistes päevapalkades nad kokku leppisid?[a]

[a] Näide õpikust Anton Rorres, „Elementary Linear Algebra".

Lahendus. Tähistame: p_1 on maalri päevapalk, p_2 on elektriku päevapalk ja p_3 on torumehe päevapalk. Tasakaalu saavutamiseks nõuame, et igaühel

$$\text{väljamakstavate palkade summa} = \text{kogusissetulek}.$$

Näiteks maaler maksab kümne päeva jooksul kõigi tööde eest oma kodus kokku $2p_1 + p_2 + 6p_3$, tema sissetulekuks on aga $10p_1$ (palk kõigis kolmes majas tehtavate tööde eest). Võrdsustades need avaldised kõigi kolme töölise korral saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2p_1 + \ p_2 + 6p_3 = 10p_1, \\ 4p_1 + 5p_2 + \ p_3 = 10p_2, \\ 4p_1 + 4p_2 + 3p_3 = 10p_3. \end{cases}$$

Jagades kõiki võrrandeid 10-ga ja kirjutades võrrandisüsteemi üles maatrikskujul, saame

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Lahutades vasaku poole paremast, saame homogeense võrrandi

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Lahendame saadud võrrandisüsteemi Gaussi meetodil

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{matrix} +2R_2 \\ \\ -R_2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0,9 & -0,8 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ 0 & -0,9 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 8 - R_1 \\ +R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0,9 & -0,8 \\ -3,2 & 3,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seega

$$\begin{cases} 0,9p_2 - 0,8p_3 = 0, \\ -3,2p_1 + 3,1p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 31C, \\ p_2 = 32C, \\ p_3 = 36C. \end{cases}$$

Et kõik saadavad päevahinnad oleks ligikaudu 100 eurot, võib näiteks valida $C = 3$. Siis

$$\begin{cases} p_1 = 93, \\ p_2 = 96, \\ p_3 = 108. \end{cases}$$

Vastus: Kokku lepitud päevapalgad on: maaler 96 €, elektrik 96 €, torumees 108 €.

Ül 2.25. Külas on kolm põllumeest N, K ja R . Üks kasvatab nisu, teine kaera ja kolmas rukist. Nad on omavahel otsustanud, et igal aastal saab N endale $\frac{1}{2}$ nisust, $\frac{1}{3}$ kaerast ja $\frac{1}{4}$ rukkist. K saab $\frac{1}{3}$ nisust, $\frac{1}{3}$ kaerast ja $\frac{1}{3}$ rukkist. Ning R saab $\frac{1}{6}$ nisust, $\frac{1}{3}$ kaerast ja $\frac{1}{2}$ rukkist. Millise hinnaga peaks igaüks neist oma toodangut müüma, et see vastaks tasakaaluolukorrale?

Lahendus. Olgu nisu hind p_1, kaera hind p_2 ja rukki hind p_3. Moodustame hinnavektori P ja vahetusmaatriksi E

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Tasakaaluolukorras peab kehtima

$$EP = P \quad \text{ehk} \quad (I - E)P = 0.$$

$$I - E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

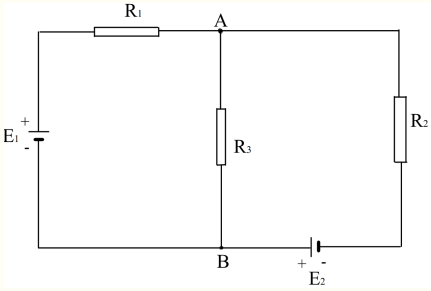
Lahendame Gaussi meetodil sellise kordajate maatriksiga lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 12 \\ \cdot 12 \\ \cdot 12 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -4 & -3 \\ -4 & 8 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} +3R_3 \\ -2R_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -16 & 15 \\ 0 & 16 & -15 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +2R_1 \\ \cdot 4 - R_1 \end{matrix} \sim$$

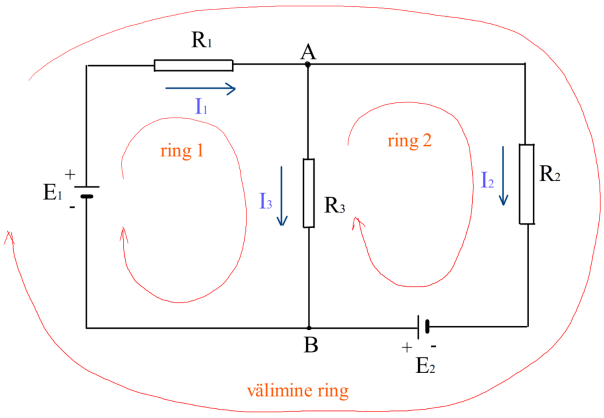
$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -16 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -16p_2 + 15p_3 = 0, \\ -8p_1 + 9p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{9}{8}C, \\ p_2 = \frac{15}{16}C, \\ p_3 = C. \end{cases}$$

Vastus: Tasakaaluolukorras peab nisu hind olema $\frac{9}{8}$ rukki hinnast ja kaera hind $\frac{15}{16}$ rukki hinnast.

Ül 2.26. Vaatleme joonisel toodud vooluringi, mille korral on teada takistite väärtused ja vooluallikate elektromotoorjõud. Tuleb leida elektrivool igas juhtmelõigus.



Lahendus. Ülesande lahendamiseks kanname joonisele kokkuleppelised voolu liikumise suunad



Joonis 2.4: Voolu suunad

Kasutame Kirchhoffi vooluseadust sõlmpunktides A ja B (vt joonis 2.4):

$$\begin{aligned} \text{punktis } A: &\quad I_1 = I_2 + I_3, \\ \text{punktis } B: &\quad I_3 + I_2 = I_1, \end{aligned}$$

sest igasse punkti sissetulevate voolude summa võrdub sellest punktist väljuvate voolude summaga.

Mõlemad punktid viivad ühe ja sama lineaarse võrrandini

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \tag{2.6}$$

Valime suletud vooluringid ja lepime kokku nende läbimise suuna (näiteks päripäeva, vt joonis 2.4).

Kasutame järgmisi kokkuleppeid:

- pingelangus on positiivne, kui vool läbib takistit samas suunas ringi läbimise suunaga,
- kui vool läbib takistit ringi läbimise suunaga võrreldes vastupidises suunas, siis on pingelangus negatiivne,
- elektriallikat läbides on pingelangus positiivne, kui positiivses suunas liikudes liigume plussilt miinusele,
- kui liigume miinuselt plussile, siis on pingelangus negatiivne.

Kirchhoffi pingeseaduse järgi on igas suletud vooluringis on pingelanguste summa null.

Seega vooluringi 1 korral:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 - E_1 = 0; \tag{2.7}$$

vooluringi 2 korral:

$$R_2 I_2 - E_2 - R_3 I_3 = 0, \tag{2.8}$$

sest pingelangus takistil on $E = IR$ (Ohmi seadus).
Välimine vooluring annaks nende võrrandite summa:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 - E_1 = 0.$$

Võrranditest (2.6), (2.7) ja (2.8) saame kokku võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1, \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 = E_2. \end{cases}$$

Kui ette anda kindlad väärtused, näiteks (Anton, Rorres „Elementary linear algebra”) $R_1 = 7\Omega$, $R_2 = 11\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 30V$, $E_2 = 50V$, siis saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ 7I_1 + 3I_3 = 30, \\ 11I_2 - 3I_3 = 50, \end{cases} \tag{2.9}$$

mille lahendamisel Gaussi meetodiga (vt allpool olevat maatriksi teisendamist) saame vastuseks

$$I_1 = \frac{570}{131}\,(A), \qquad I_2 = \frac{590}{131}\,(A), \qquad I_3 = -\frac{20}{131}\,(A).$$

Kuna saime negatiivse I_3 väärtuse, siis on tegelik voolusuund sellel juhtmelõigul vastupidine joonisel 2.4 kujutatule.

Võrrandisüsteemi (2.9) laiendatud maatriksi teisendamine.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 11 & -3 & 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \\ \cdot 7 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & -7 & -7 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 77 & -21 & 350 \end{bmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -7 & -10 & -30 \\ 7 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 77 & -21 & 350 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +11II \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -7 & -10 & -30 \\ 7 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 0 & -131 & 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot 131 \\ \cdot 131 \\ :(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -917 & -1310 & -3930 \\ 917 & 0 & 393 & 3930 \\ 0 & 0 & 131 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} +10III \\ -3III \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -917 & 0 & 4130 \\ 917 & 0 & 0 & 3990 \\ 0 & 0 & 131 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -917 & -1310 & -3930 \\ 917 & 0 & 393 & 3930 \\ 0 & 0 & 131 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} +10III \\ -3III \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -917 & 0 & 4130 \\ 917 & 0 & 0 & 3990 \\ 0 & 0 & 131 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -917I_2 &= -4130 \\ 917I_1 &= 3990 \\ 131I_3 &= -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = \frac{-4130}{-917} = \frac{590}{131} \\ I_1 = \frac{3990}{917} = \frac{570}{131} \\ I_3 = -\frac{20}{131} \end{cases}$$

Vastus: Vooluringi voolutugevused on $I_1 = \frac{570}{131}\,(A)$, $I_2 = \frac{590}{131}\,(A)$, $I_3 = -\frac{20}{131}\,(A)$.

Lineaarse konstantsete kordajatega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmine

Tahame lahendada diferentsiaalvõrrandit

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{2.10}$$

kus $y(x)$ on otsitav funktsioon, $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ on teadaolevad reaalarvud $f(x)$ on esitatav kujul

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x),$$

kus $P_n(x)$ ja $Q_n(x)$ polünoomid (maksimaalselt astmega $\leq n$).
Mittehomogeensee võrrandi üks erilahend on leitav määramata kordajate meetodil.
Kui $\alpha + i\beta$ ei ole karakteristliku võrrandi lahendiks, siis otsime erilahendit kujul

$$y_* = e^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x), \tag{2.11}$$

kus $R_n(x)$ ja $S_n(n)$ on määramata kordajatega ülimalt n astme polünoomid.
Kui $\alpha + i\beta$ on karakteristliku võrrandi m-kordseks lahendiks, siis otime erilahendit kujul

$$y_* = x^m e^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x). \tag{2.12}$$

Polünoomide $R_n(x)$ ja $S_n(x)$ kordajad määratakse nii, et esialgne diferentsiaalvõrrand oleks rahuldatud kõikide x väärtuste korral.

Ül 2.27. Leida diferentsiaalvõrrandi $y' + y = x$ üldlahend.

Lahendus. Leiame esmalt võrrandile vastava homogeense võrrandi $y' + y = 0$ üldlahendi. Koostame karakteristliku võrrandi $k + 1 = 0$, millest $k = -1$ ja homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on $y_H = C\mathrm{e}^{-x}$.

Järgnevalt uurime esialgse diferentsiaalvõrrandi vabaliikmeks olevat funktsiooni $f(x)$. Meie funktsiooni saab esitada kujul

$$f(x) = x = e^{0x}(x \cdot \cos(0\,x) + 0 \cdot \sin(0\,x)),$$

see tähendab, et $\alpha = 0$ ja $\beta = 0$. Kuna $0 + 0 \cdot i = 0$ ei ole karakteristliku võrrandi lahendiks, siis valemis (2.11) võtame $m = 0$. Diferentsiaalvõrrandi lahendit otsime samasugusel kujul, nagu on $f(x)$. Muudame ainult $\sin(0\,x)$ ja $\cos(0\,x)$ ees olevaid polünoome.

Polünoomid $P_n(x) = x$ on 1. astme polünoom ja $Q_n(x) = 0$ on 0. astme polünoom. n väärtuseks võtame neist suurima, st $n = 1$. Seega otsime ka polünoome $R_n(x)$ ja $S_n(x)$ 1. astme polünoomidena (kujul $ax + b$).
Seega otsime y_* kujul

$$y_* = e^{0x}((ax + b)\cos(0x) + (cx + d)\sin(0x)) = ax + b$$

Seega, kuna $f(x)$ on 1. astme polünoom, siis otsime ka y_* kui 1. astme polünoomi.

Meil on vaja määrata kordajate a ja b väärtused. Selleks leiame tuletise y'_* ja asendme nii y_* kui ka $y'_* = a$ esialgsesse võrrandisse. Saame

$$a + ax + b = x.$$

Tahame, et võrdus kehtiks iga x korral, selleks peab

$$\begin{cases} a = 1, \\ a + b = 0, \end{cases},$$

mille lahendamisel saame, et

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = -1 \end{cases}$$

ja seetõttu $y_* = x - 1$. Linaaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on selle võrrandile vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi y_H ja mittehomogeense võrrandi erilahendi y_* summa

$$y(x) = y_H + y_* = Ce^{-x} + x - 1.$$

Vastus: Diferentsiaalvõrrandi üldlahend on $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$.

Ül 2.28. Leida diferentsiaalvõrrandi $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ üldlahend.

Lahendus. Leiame esmalt võrrandile vastava homogeense võrrandi $y'' + y' - 6y = 0$. Karakteristliku võrrandi $k^2 + k - 6 = 0$ lahenditeks on $k_1 = 2$ ja $k_2 = -3$, diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$y_H = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}.$$

Järgnevalt uurime võrrandi paremal pool olevat funktsiooni $f(x)$.

$$f(x) = xe^{2x} = e^{2x}(x \cdot \cos(0x) + 0 \cdot \sin(0x))$$

Siin $P_n(x) = x$ on 1. astme polünoom ja $Q_n(x) = 0$ on 0. astme polünoom. n väärtuseks võtame neist suurima, st $n = 1$. Seega erilahendisse kuuluvad polünoomid on 1. astme polünoomid ja neid tuleb otsida kujul $R_1(x) = ax + b$ ning $S_1(x) = cx + d$.

Leiame ka $\alpha = 2$ ja $\beta = 0$. Kuna $k = 2 + 0 \cdot i$ on karakteristliku võrrandi (ühekordseks) lahendiks, siis tuleb valemis (2.12) võtta $m = 1$ ja $y*$ otsida kujul

$$y_* = x^1e^{2x}((ax + b)\cos(0x) + (cx + d)\sin(0x)) =$$

$$= x(ax + b)e^{2x} = (ax^2 + bx)e^{2x}$$

Kordajate a ja b määramiseks leiame y'_* ja y''_*

$$y'_* = (2ax + b)e^{2x} + (ax^2 + b)2e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b)e^{2x}$$

$$y_*'' = (4ax + 2a + 2b)e^{2x} + (2ax^2 + (2a + 2b)x + b)2e^{2x} =$$
$$= (4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b)e^{2x}$$

ja asendame need koos y_*-ga algsesse diferentsiaalvõrrandisse

$$(4ax^2 + (8a + 4b)x + 2a + 4b)e^{2x} + (2ax^2 + (2a + 2b)x + b)e^{2x} -$$
$$-6(ax^2 + bx)e^{2x} = xe^{2x}$$

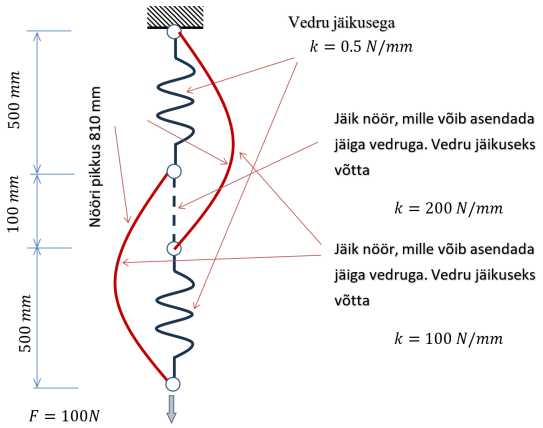
Peale taandamist saame

$$10ax + 2a + 5b = x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 10ax = x \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = -\frac{1}{25} \end{cases}$$

mistõttu $y_* = (\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x)e^{2x}$ ja üldlahend on $y(x) = y_H + y_*$.

Vastus: Diferentsiaalvõrrandi üldlahend on $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + \left(\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x\right)e^{2x}$.

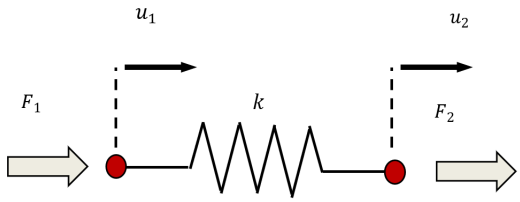
Ül 2.29. Joonisel on näidatud vedrusüsteem, mis käitub väga huvitavalt. Tavapäraselt käituvad enamus mehaanilisi süsteeme nii, et mingi mehaanilise osa süsteemist eemaldamisel või purunemisel kogu süsteemi jäikus väheneb. Jäikuse vähenemist näitab see, kui vigastatud või eemaldatud elemendiga süsteemi koormatud punkti siire kasvab võrreldes terve süsteemiga, mis on koormatud sama koormusega. Sama loogika tundub töötavat ka joonisel 2.5 näidatud süsteemi korral. Keskmise jäiga nööri (katkendjoon) läbilõikamisel võiks koormatud sõlmpunkti siire kasvada. Kas see ka tegelikult nii on? Küsimuse selgitamiseks saab uurida vedruelementidest koosnevat arvutusmudelit.



Joonis 2.5: Vedrusüsteem

Lahendus. Koostame matemaatilise mudeli süsteemist, kus kõik elemendid võiks asendada vedrudega. Oletame, et sõlmpunktid saavad liikuda ainult vertikaalses sihis. Sõlmpunktid on seotud omavahel vedrude ja nööridega. Oletame, et vedrude jäikused on väikesed ja nöörid käituvad sarnaselt vedrudega, ainult kuna nende venivus on oluliselt väiksem, siis võime kujutada nööre lihtsalt vedrudena, mille jäikus on oluliselt suurem kahe tegeliku vedru jäikusest.

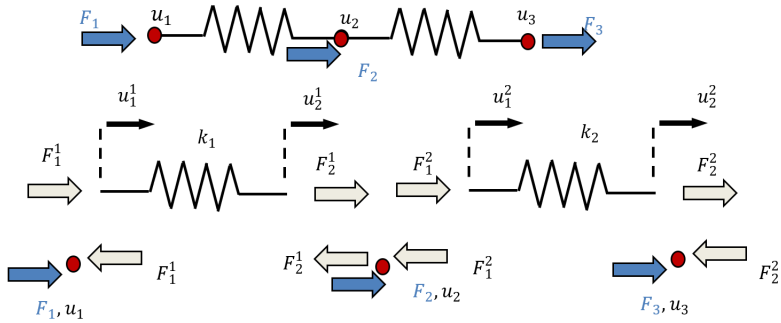
Üksiku vedru käitumist saab kirjedada võrrandiga, millised võib esitada maatriksi ja vektorite abi järgnevalt.



$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$

kus u_1 ja u_2 on vedru vastava sõlmpunkti siire, k on vedru jäikus ning F_1 ja F_3 on vedru sõlmpunkti rakendatud jõud.

Pannes kokku süsteemi kahest vedrust peame arvestama tingimustega, et sõlmedele mõjuvad vedrude reaktsioonjõud (hallid nooled) ja sõlmele rakendatud välisjõud (sinised nooled) peavad olema tasakaalus.



Tasakaalutingimused kolme sõlme jaoks oleksid siis

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^1, \\ F_2 &= F_2^1 + F_1^2, \\ F_2 &= F_2^2. \end{aligned}$$

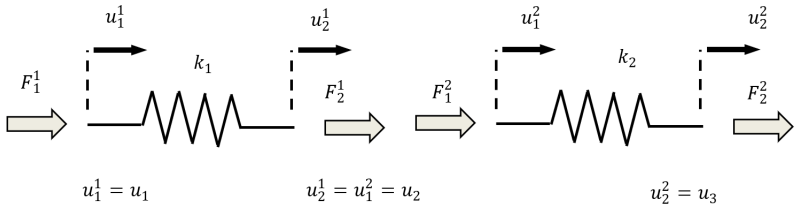
Ühe indeksiga jõud F_i tähistab välisjõudu, mis rakendatud vastava numbriga sõlme. Kahe indeksiga jõud F_j^n tähistab antud juhul vedru numbriga n reaktsioonjõudu.

Ülemine indeks näitab, millise vedruga on vastav reaktsioonjõud seotud, ning alumine indeks näitab, kas tegemist on vedru esimese sõlme ($j = 1$) või teise sõlme reaktsioonjõuga ($j = 2$).

Siire u_i tähistab sõlme i siiret ja u_j^n vastavalt vedru n esimese ($j = 1$) või teise sõlme ($j = 2$) siiret.

Tõstame nüüd vedrude reaktsioonjõud, mis on esitatud maatrikskujul sisse sõlmede

tasakaaluvõrranditesse ja võtame arvesse ka selle, millise sõlme siirdega on vastava vedru otsa siire seotud.



$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix}$$

Seega saame kahe koostoimiva vedrusüsteemi jaoks võrrandi

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}.$$

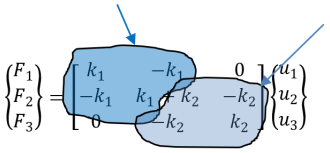
Siin 3×3 maatriksit võib nimetada süsteemi jäikusmaatriksiks ja **u** vektor on süsteemi siirdevektor ja **F** vektor on süsteemi koormusvektor.

Esimene vedruelement on sõlmede 1 ja 2 vahel.

Elemendi jäikusmaatriksi osad liidetakse jäikusmaatriksi elementidele 1,1; 1,2; 2,1 ja 2,2

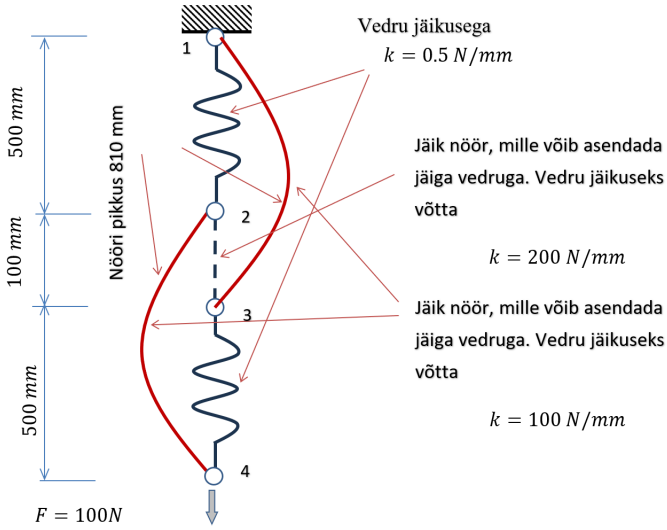
Teine vedruelement on sõlmede 2 ja 3 vahel.

Elemendi jäikusmaatriksi osad liidetakse globaalse jäikusmaatriksi elementidele 2,2; 2,3; 3,2 ja 3,3



Antud loogikat saame kasutada ka keerulisema vedrusüsteemi võrrandsüsteemi koostamiseks. Kasutame seda loogikat vedrudest ja nööridest koosneva süsteemi lahendamiseks. Vaatleme esmalt tervet süsteemi, kus katkendjoonega nöör ei ole läbi lõigatud ja lõdvalt kinnitatud pikemad nöörid ei ole sirgenenud ehk need ei tööta.

Joonisel 2.6 olev süsteem koosneb neljast sõlmest, seega koostame jäikusmaatriksi, mille dimensioon on 4×4.



Joonis 2.6: Nelja sõlmega vedrusüsteem

Peale esimese vedru lisamist (vedru on sõlmede 1 ja 2 vahel) süsteemi saame jäikusmaatriksi kujul

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lisame järgmisena katkendjoonena kujutatud nööri (nöör on jäikusega 20000 N/mm sõlmede 2 ja 3 vahel)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lisame lõpuks ka alumise vedru (alumine vedru on sõlmede 3 ja 4 vahel)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Koormusvektor $\mathbf{F}$ on kujul

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix},$$

sest jõud rakendub ainult neljandasse sõlme.

Võrrandisüsteem on

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 200.5 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Kuna sõlm 1 on kinni ja liikuda ei saa, siis $u_1 = 0$ ja süsteemist saame esimese võrrandi ära jätta. Kuna $u_1 = 0$, siis võime loobuda ka jäikusmaatriksi esimesest veerust.

$$\begin{bmatrix} 200.5 & -200 & 0 \\ -200 & 200.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamiseks leiame jäikusmaatriksi pöördmaatriksi

$$\begin{bmatrix} 200.5 & -200 & 0 \\ -200 & 200.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2.005 & 2.005 \\ 0 & 2.005 & 4.005 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2.005 & 2.005 \\ 0 & 2.005 & 4.005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 200.5 \\ 400.5 \end{bmatrix}.$$

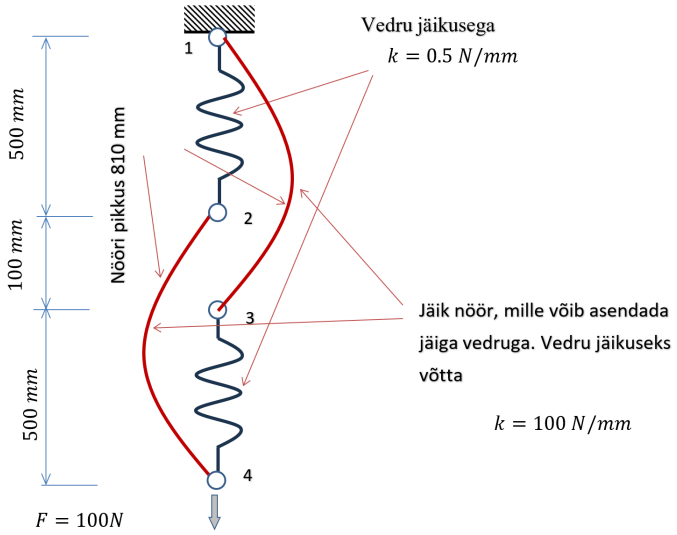
Vastuseks saame, et alumine koormatud punkt siirdub jõu 100 N rakendamisel 400.5 mm allapoole. Oluline on märkida, et mittepingul külgnöörid jäävadki sellise siirete korral lõdvaks ja lisakoormust kandma ei hakka.

Teeme nüüd sarnase arvutuse süsteemile, kus katkendjoonega tähistatud nöör on läbi lõigatud (vt joonis 2.7). Nüüd venivad esmalt sirgeks kaks seni mittepingul olevat nööri. Kuna nööri pikkus on 810 mm, siis tekib nööride sirgenemisel ilma koormuseta esmalt siire $500 + 810 - 1100 = 210$ mm.
Nüüd arvutame lisasiirde, mis tekib koormusest. Selleks koostame võrrandid uue süsteemi jaoks. Liidame süsteemi esimese vedru (sõlmede 1 ja 2 vahel)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Liidame süsteemi esimese nööri (sõlmede 1 ja 3 vahel)

$$\begin{bmatrix} 0.5 + 100 & -0.5 & -100 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -100 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Joonis 2.7: Lõigatud nööriga nelja sõlmega vedrusüsteem

Liidame süsteemi teise nööri (sõlmede 2 ja 4 vahel)

$$\begin{bmatrix} 0.5+100 & -0.5 & -100 & 0 \\ -0.5 & 0.5+100 & 0 & -100 \\ -100 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & -100 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Liidame süsteemi teise vedru (sõlmede 3 ja 4 vahel)

$$\begin{bmatrix} 0.5+100 & -0.5 & -100 & 0 \\ -0.5 & 0.5+100 & 0 & -100 \\ -100 & 0 & 100+0.5 & -0.5 \\ 0 & -100 & -0.5 & 100+0.5 \end{bmatrix}.$$

Uus võrrandisüsteem on

$$\begin{bmatrix} 100.5 & -0.5 & -100 & 0 \\ -0.5 & 100.5 & 0 & -100 \\ -100 & 0 & 100.5 & -0.5 \\ 0 & -100 & -0.5 & 100.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Võtame jälle arvesse asjaolu, et esimene sõlm on fikseeritud, so $u_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 100.5 & 0 & -100 \\ 0 & 100.5 & -0.5 \\ -100 & -0.5 & 100.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamiseks leiame jäikusmaatriksi pöördmaatriksi

$$\begin{bmatrix} 100.5 & 0 & -100 \\ 0 & 100.5 & -0.5 \\ -100 & -0.5 & 100.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.005 & 0.005 & 1 \\ 0.005 & 0.01 & 0.005 \\ 1 & 0.005 & 1.005 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.005 & 0.005 & 1 \\ 0.005 & 0.01 & 0.005 \\ 1 & 0.005 & 1.005 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0.5 \\ 100.5 \end{bmatrix}.$$

Seega on alumise sõlme koormusest tingitud siire 100.5 mm ja koos nööride sirgenemisega tuleb kogusiirdeks $210 + 100.5 = 310.5$ mm. Antud siire on väiksem, kui esialgse süsteemi siire, mis oli 400.5 mm.

Seega käitub antud süsteem tõesti nii, et elemendi eemaldamisel süsteemi jäikus suureneb.

Ül 2.30. Projekteeritakse maanteed laugelt langevale maapinnale, mis on ligikaudselt tasand. Maapinna kõrgust h kokkuleppelise nulltaseme suhtes on mõõdetud 9 erinevas punktis. Tulemused on toodud järgmises tabelis:

$x(100\,\mathrm{m})$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$y(100\,\mathrm{m})$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$h(\mathrm{m})$	10.1	9.15	7.9	7.7	6.9	6.1	6.1	5.15	3.9

Drenaaži jaoks tehtavates arvutustes läheb vaja maapinna suurimat langenurka ja suunda, milles on langenurk suurim.

Olgu maapinna võrrand $h = ax + by + c$. Moodustame tabelis olevatest ridadest vektorid $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_9)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_9)$, $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_9)$. Tekib järgmine lineaarne võrrandisüsteem:

$$x_i a + y_i b + c = h_i,\ i = 1, \ldots, 9 \tag{2.13}$$

kordajate a, b ja c määramiseks. Antud süsteemi puhul ei ole Kronecker-Capelli teoreemi eeldused täidetud. Seega lahend puudub. Küll aga eksisteerib pseudolahend.

1) Leida süsteemi (2.13) pseudolahend (a, b, c).

2) Leida tasandi $h = ax + by + c$ suurim langenurk ja suund, milles on langenurk suurim.

Lahendus. **1)** Maatrikskujul on süsteem (2.13) järgmine: $A\mathbf{c} = \mathbf{h}^T$, kus

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ & \ldots & \\ x_9 & y_9 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ja ülaindeks T tähistab transponeerimist. Pseudolahendi saamiseks tuleb lahendada järgmine süsteem:

$$A^T A\mathbf{c} = A^T \mathbf{h}^T. \tag{2.14}$$

Arvutame:

$$A^TA = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{9} x_i^2 & \sum_{i=1}^{9} x_iy_i & \sum_{i=1}^{9} x_i \\ \sum_{i=1}^{9} x_iy_i & \sum_{i=1}^{9} y_i^2 & \sum_{i=1}^{9} y_i \\ \sum_{i=1}^{9} x_i & \sum_{i=1}^{9} y_i & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 9 \\ 9 & 15 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{9} x_ih_i \\ \sum_{i=1}^{9} y_ih_i \\ \sum_{i=1}^{9} h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 51 \\ 63 \end{bmatrix}.$$

Seega võrrandisüsteemi (2.14) maatrikskuju on

$$\begin{bmatrix} 15 & 9 & 9 \\ 9 & 15 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 51 \\ 63 \end{bmatrix},$$

selle lahend on $a = -1$, $b = -2$, $c = 10$.

2) Maapinna võrrand on

$$h = -x - 2y + 10$$

ehk meetermõõdustikus

$$h = -0.01\mathrm{x} - 0.02\mathrm{y} + 10,$$

kus $x = 0.01\mathrm{x}$ ja $y = 0.01\mathrm{y}$. Kiireima kasvu suund on muutujate x ja y kordajatest moodustuv vektor, st $\mathbf{w} = (-1, -2)$. Kiireima languse suund on seega $\mathbf{v} = -\mathbf{w} = (1, 2)$. Selleks, et leida langenurka suunas $\mathbf{v}$ teeme sammu koordinaatide alguspunktist selles suunas ja arvutame kõrguste vahe jagatise sammupikkusega meetermõõdustikus. Saame

$$\Delta = \frac{-0.01 \cdot 1 - 0.02 \cdot 2 + 10 - 10}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = -\sqrt{5} \cdot 10^{-2}.$$

Tegemist on langenurga tangensiga. Langenurk radiaanides on $\varphi = \arctan \Delta \approx -0.0224$ ja kraadides $\phi \approx -1.28°$.

Vastus: Maapinna suurim langenurk on $\phi \approx -1.28°$.

Ül 2.31. Tabelis on antud teatud investeeringu väärtus aastate lõikes:

t	1. aasta	2. aasta	3. aasta	4. aasta
$R(10^5\,\text{EUR})$	3	3.21	3.43	3.69

Kirjeldame investeeringu värtust eksponentfunktsiooniga $R = ae^{bt}$. Moodustame tabelis olevatest ridadest vektorid $\mathbf{t} = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4)$. Tekib järgmine võrrandisüsteem:

$$ae^{bi} = R_i,\ \ i = 1, 2, 3, 4. \tag{2.15}$$

Tegemist on mittelineaarse süsteemiga kahe tundmatu a ja b määramiseks. Me saame selle teisendada lineaarseks võrrandüsteemiks kasutades logaritmimist. Võtame (2.15) vasakust ja paremast poolest naturaallogaritmi ja teisendame vasakut poolt kasutades logaritmi omadusi. Saame

$$\ln a + bi = \ln R_i,\ \ i = 1, 2, 3, 4. \tag{2.16}$$

Toome sisse uued tundmatud suurused

$$c_1 = \ln a,\ \ c_2 = b. \tag{2.17}$$

Saame järgmise lineaarse võrrandisüsteemi suuruste c_1 ja c_2 määramiseks:

$$c_1 + i\,c_2 = \ln R_i,\ \ i = 1, 2, 3, 4. \tag{2.18}$$

Antud süsteemi puhul ei ole Kronecker-Capelli teoreemi eeldused täidetud. Seega lahend puudub. Küll aga eksisteerib pseudolahend.

1) Leida süsteemi (2.18) pseudolahend (c_1, c_2).

2) Kasutades seoseid (2.17) arvutada suurused a ja b ning konstrueerida eksponentfunktsioon $R = ae^{bt}$.

3) Prognoosida investeeringu väärtust 5. aastal.

Lahendus. **1)** Maatrikskujul on süsteem (2.18) järgmine: $A\mathbf{c} = \mathbf{q}$, kus

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \ln R_1 \\ \ln R_2 \\ \ln R_3 \\ \ln R_4 \end{bmatrix}.$$

Pseudolahendi saamiseks tuleb lahendada järgmine süsteem:

$$A^T A\mathbf{c} = A^T \mathbf{q}, \tag{2.19}$$

kus T tähistab transponeerimist. Arvutame:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \ln R_i \\ \sum_{i=1}^{4} i \ln R_i \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.80 \\ 3.97 \end{bmatrix}.$$

Seega on süsteem (2.19) järgmine:

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.80 \\ 3.97 \end{bmatrix}.$$

Selle lahend on $c_1 \approx 1.03$, $c_2 \approx 0.07$.

2) Valemite (2.17) põhjal $a = e^{c_1} \approx 2.8$, $b = c_2 \approx 0.07$. Seega $R = 2.8e^{0.07t}$.

3) Prognoos 5. aastal on $2.8e^{0.07 \cdot 5} \approx 3.97 \cdot 10^5$ EUR.

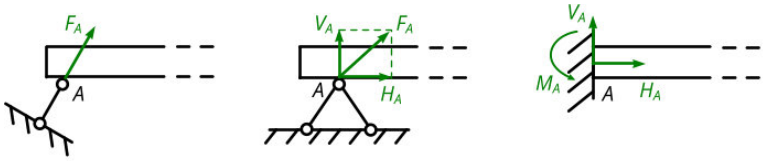
Vastus: Ekponentfunktsioon on $R = 2.8e^{0.07t}$ ja investeeringu prognoositav väärtus 5. aastal on $3.97 \cdot 10^5$ EUR.

2.3.1. Tasapinnalise raami toerektsioonid arvutamine

Lineaarvõrrandite süsteemiga puutub ehituse tudeng kokku inseneriüüsika kursuse mehaanika osas ning ainetes tugevusõpetus I ja II.

Põhiline rakendus: mingi tala, raam või konstruktsioon on koormatud, toestatud ja on nende mõjude toimel tasakaalus. Eeldusel, et koormuste väärtused on antud, tuleb välja arvutada tugedes tekkivad jõud (ja/vôi momendid), mis tagavad konstruktsiooni tasakaalu. Tugedes tekkivaid jõude ja momente nimetatakse **toereaktsioonideks**.

Näiteid tugedest ja neile vastavatest toereaktsioonidest:



Liikuv liigendtugi - tugi on toena kujutatava kerge varda sihis liikumatu.

Liikumatu liigendtugi - reaktsioonjôud F_A on tasapinnas mistahes suunas, enamasti määratakse eraldi horisontaalne komponent $H_A$ja vertikaalne komponent V_A.

Jäik kinnitus - lisaks liikumatu liigendi reaktsijõu komponentidele tekib jäigas toes ka momentreaktsioon M_A, mis ei luba tala otsal pöörduda.

Talale, raamile või konstruktsioonile mõjuvad koormused ja toereaktsioonid moodustavad kokku **jõusüsteemi**, mis on tasakaalus. Toereaktsioonide arvutamisel kasutatakse jõusüsteemi **tasakaalutingimusi**.

Olgu konstruktsioon on tasapinnaline ja sellele mõjuv jõusüsteem samuti, so kõik jõusüsteemi moodustavad jõud asetsevad ühes tasapinnas. Sel juhul on mittetriviaalseid tasakaalutingimusi kolm. Valime konstuktsiooni tasapinnaks xy-tasandi, siis võime kirjutada:

$$a)\ \begin{cases} \sum\limits_i F_{ix} = 0, \\ \sum\limits_i F_{iy} = 0, \\ \sum\limits_i M_{izA} = 0, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \sum\limits_i F_{ix} = 0, \\ \sum\limits_i M_{izA} = 0, \\ \sum\limits_i M_{izB} = 0, \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} \sum\limits_i M_{izA} = 0, \\ \sum\limits_i M_{izB} = 0, \\ \sum\limits_i M_{izC} = 0. \end{cases}$$

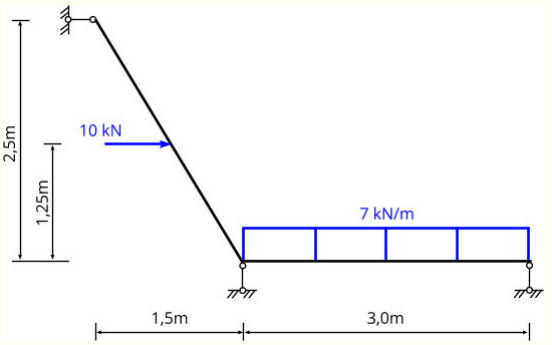
Kolme võrrandi sisu võib aga olla erinev:

a) Kõigi jõudude projektsioonide summa x- ja y-telje suunal on null ja kõigi jõudude momentide projektsioonide summa xy-tasandiga ristuva z-telje suhtes on null. Momentide projektsioonide summa peab olema null sõltumata punkti A läbiva z-telje asukohast ehk ei sõltu z-telje asukohast.

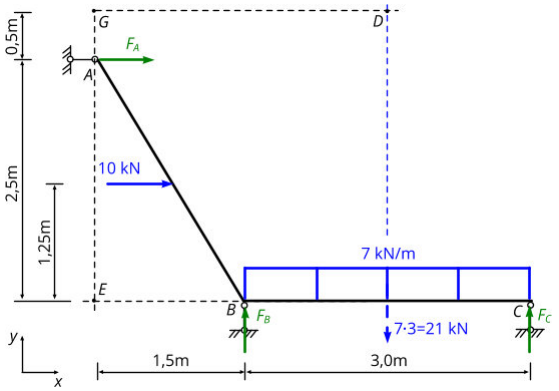
b) Ühe telje suhtes (näiteks x-telg) jõudude pojektsioon on null ja kahe erineva punkti A ja B suhtes arvutatud momentide projektsioonide summa on null. Punkte A ja B läbiv sirge ei tohi sealjuures olla risti x-teljega.

c) xy-tasandi kolme erinevat punkti A, B ja C läbiva z-telje suhtes on momentide projektsioonide summa null. Sealjuures ei tohi puktid A, B ja C asetseda ühel sirgjoonel.

Ül 2.32. Arvutada joonisel antud tasandraami toereaktsioonid.



Lahendus. Valime raami tasapinnal x- ja y-telje ning vabastame raami tugedest märkides skeemile vastavad toereaktsioonid.



Joonis 2.8: Raamiga seotud koordinaadistik ja toereaktsioonid

Punktides A, B ja C on liikuvad liigendtoed, reaktsioonid on on kergete tugivarraste sihis ning nende suunad võime ise määrata (vt joonis 2.8).

Mehaanikas ei kanta jõuvektorile vektori märki, jõudu näidatakse oma rakenduspunktis noolega või „sabaga", nagu see skeemile paremini paigutub. Kui juhtub, et tegelik jõud mõjub joonisele märgitule vastassuunas, siis ülesande lahenduses tuleb see negatiivne.

Kirjutame välja kolm momendi tasakaaluvõrrandit punkte D, E ja G läbiva z-suhtes.

Kirjutame välja punkte D, E ja G läbivate z-teljega paralleeleste tegede suhtes kolm momendi tasakaaluvõrrandit.
Loeme positiivseks punkti ümber telje vastupäeva pöörava momendi.

$$\begin{cases} \sum\limits_i M_{izD} = 0, & F_A \cdot 0.5 - F_B \cdot 1.5 + F_C \cdot 1.5 + 10 \cdot 1.75 = 0 \\ \sum\limits_i M_{izE} = 0, & -F_A \cdot 2.5 + F_B \cdot 1.5 + F_C \cdot 4.5 - 7 \cdot 3 \cdot (1.5 + 1.5) - 10 \cdot 1.25 = 0 \\ \sum\limits_i M_{izG} = 0, & F_A \cdot 0.5 + F_B \cdot 1.5 + F_C \cdot 4.5 - 7 \cdot 3 \cdot (1.5 + 1.5) - 10 \cdot (1.25 + 0.5) = 0 \end{cases}$$

Viime võrrandites vabaliikmed paremale poole ja saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot F_A - 1.5 \cdot F_B + 1.5 \cdot F_C = -17.5, \\ -2.5 \cdot F_A + 1.5 \cdot F_B + 4.5 \cdot F_C = 75.5, \\ 0.5 \cdot F_A + 1.5 \cdot F_B + 4.5 \cdot F_C = 45.5. \end{cases}$$

Selle laiendatud maatriks on

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0.5 & -1.5 & 1.5 & -17.5 \\ -2.5 & 1.5 & 4.5 & 75.5 \\ 0.5 & 1.5 & 4.5 & 45.5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 0.5 & -1.5 & 1.5 & -17.5 \\ 0 & -6 & 12 & -12 \\ 0 & 3 & 3 & 63 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +5R_1 \\ -R_1 \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 0.5 & -1.5 & 1.5 & -17.5 \\ 0 & -6 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 9 & 57 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ +0.5R_2 \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 3 & -35 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} :0.5 \\ :(-6) \\ :9 \end{array}$$

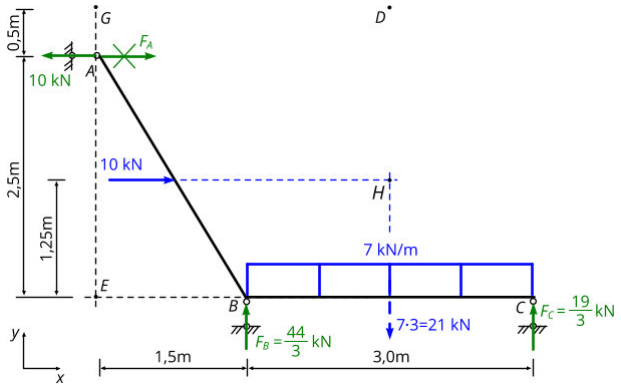
Viimasest maatriksist leiame

$$\begin{array}{lllll} F_C &= \frac{19}{3} & & & \approx 6.33 \text{ kN} \\ F_B &= 2 + 2F_C & = 2 + 2 \cdot \frac{19}{3} & = \frac{44}{3} & \approx 14.67 \text{ kN} \\ F_A &= -35 - 3F_C + 3F_B & = -35 - 3 \cdot \frac{19}{3} + 3 \cdot \frac{44}{3} & = -10 & = -10.00 \text{ kN} \end{array}$$

Otsitavad F_B ja F_C on positiivsed, järelikult bee jõud mõjuvad eeldatud suunas. Kuna F_A on negatiivne, siis jõu tegelik suund on eeldatule vastupidine ehk vasakule väärtusega 10 kN (vt joonis 2.9).

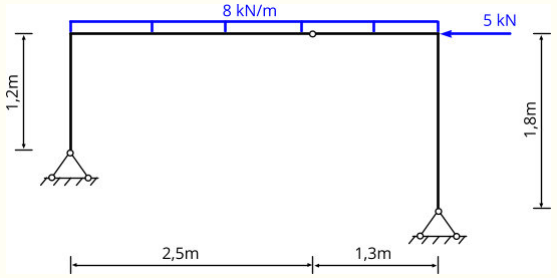
Tulemuste kontrollimiseks võib kasutada jõudude projektsioonide võrrandeid ja mõne teise punkti suhtes arvutatud momentide projektsioone.

$$\begin{array}{lll} \text{K}: & \sum\limits_i F_{ix} & = -10 + 10 = 0 \\ \text{K}: & \sum\limits_i F_{iy} & = -7 \cdot 3 + \frac{44}{2} + \frac{19}{3} = -21 + \frac{63}{3} = -21 + 21 = 0 \\ \text{K}: & \sum\limits_i M_{izH} & = 10 \cdot 1.25 - \frac{44}{3} \cdot 1.5 + \frac{19}{3} \cdot 1.5 = 0 \end{array}$$



Joonis 2.9: Jõudude projektsioonide tegelikud suunad

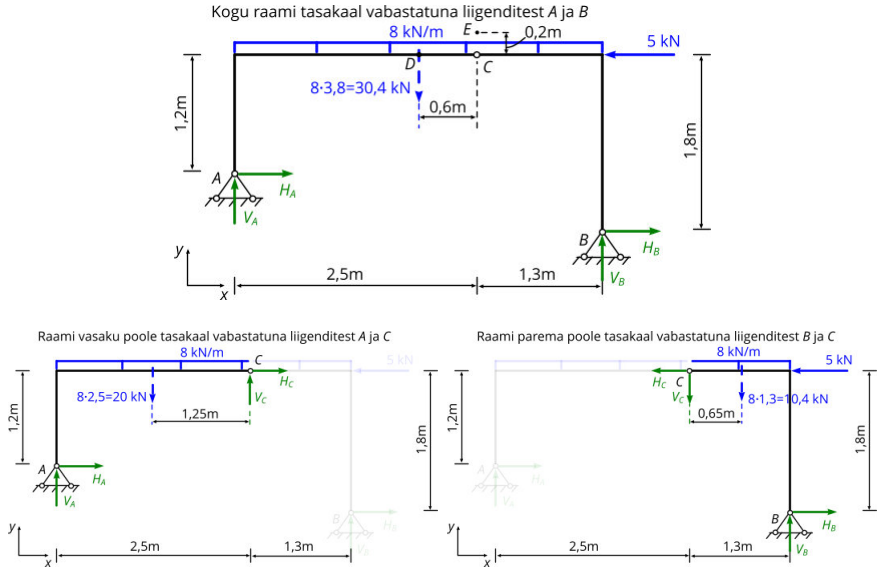
Ül 2.33. Arvutada joonisel antud tasandraami toereaktsioonid äärmistes liigendtugedes.



Lahendus. Selline kolme liigendiga raam koosneb vasakust ja paremat poolest. Mõlemad pooled on alt toestatud liikumatu liigendtoega – vastavalt toed A ja B. Raamide pooled on omavahel seotud punktis C liikumatu liigendiga. Viimast liigendit tulem mõista nii, et raami pooled ei saa punktis C teineteise suhtes siirduda, kuid saavad pöörduda.

Eeldusel, et raam on tasakaalus, on tasakaalus ka selle vasak ja parem pool. Kogu raami ja selle vasaku ning parema poole jaoks saab koostada skeemid ühes tekkivate tundmatutega.

Kolme liigendi peale on kokku $3 \cdot 2 = 6$ muutujat. Kuna tasakaalus osi on 2, siis saab raami vasaku poole (VP) jaoks kirjutada 3 lineaarselt sõltumatut tasakaaluvõrrandit. Analoogiliselt saab raami parema poole (PP) jaoks koostada 3 lineaarselt sõltumatut tasakaaluvõrrandit.



Samas võib mõne võrrandi välja ka kogu raami (KR) tasakaaluskeemilt, lihtsalt tuleb silmas pidada, et lineaarselt sõltumatuid võrrandeid saab kokku olla 6.

$$
\begin{aligned}
\text{KR}: \quad & \sum_i M_{izD} = 0 \quad H_A \cdot 1.2 - V_A \cdot \tfrac{3.8}{2} + H_B \cdot 1.8 + V_B \cdot \tfrac{3.8}{2} = 0 \\
& \sum_i M_{izE} = 0 \quad H_A \cdot 1.4 - V_A \cdot 2.5 + H_B \cdot 2 + V_B \cdot 1.3 + 8 \cdot 3.8 \cdot 0.6 - 5 \cdot 0.2 = 0 \\
\text{VP}: \quad & \sum_i M_{izC} = 0 \quad H_A \cdot 1.2 - V_A \cdot 2.5 + 8 \cdot 2.5 \cdot 1.25 = 0 \\
\text{PP}: \quad & \sum_i M_{izC} = 0 \quad H_B \cdot 1.8 + V_B \cdot 1.3 - 8 \cdot 1.3 \cdot 0.65 = 0
\end{aligned}
$$

Siit saame lineaarse võrrandisüsteemi:

$$
\begin{cases}
1.2 \cdot H_A - 1.9 \cdot V_A + 1.8 \cdot H_B + 1.9 \cdot V_B = 0, \\
1.4 \cdot H_A - 2.5 \cdot V_A + 2.0 \cdot H_B + 1,3 \cdot V_B = -17.24, \\
1.2 \cdot H_A - 2.5 \cdot V_A \qquad\qquad\quad = -2.5, \\
\qquad\qquad\qquad\quad 1.8 \cdot H_B + 1.3 \cdot V_B = 6.76.
\end{cases}
$$

Selle võrrandisüsteemi laiendatud maatriks on:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1.2 & -1.9 & 1.8 & 1.9 & 0 \\
1.4 & -2.5 & 2.0 & 1.3 & -17.24 \\
1.2 & -2.5 & 0 & 0 & -25 \\
0 & 0 & 1.8 & 1.3 & 6.76
\end{array}\right]
\rightsquigarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1.2 & -1.9 & 1.8 & 1.9 & 0 \\
0 & -\frac{17}{60} & -0.1 & -\frac{11}{12} & -17.24 \\
0 & -0.6 & -1.8 & -1.9 & -25 \\
0 & 0 & 1.8 & 1.3 & 6.76
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{7}{6}\text{I} \\ -\text{I} \end{array}
\rightsquigarrow
$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1.2 & -1.9 & 1.8 & 1.9 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{60} & -0.1 & -\frac{11}{12} & -17.24 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{17} & \frac{7}{170} & \frac{4891}{425} \\ 0 & 0 & 1.8 & 1.3 & 6.76 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\frac{36}{17}\,\text{II} \end{array} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1.2 & -1.9 & 1.8 & 1.9 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{60} & -0.1 & -\frac{11}{12} & -17.24 \\ 0 & 0 & -\frac{27}{17} & \frac{7}{170} & \frac{4891}{425} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{101}{75} & \frac{7426}{375} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\frac{17}{15}\,\text{III} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{19}{12} & \frac{3}{2} & \frac{19}{12} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{17} & \frac{55}{17} & \frac{5172}{85} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{270} & -\frac{4891}{675} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7426}{505} \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot\frac{5}{6} \\ \cdot\left(-\frac{60}{17}\right) \\ \cdot\left(-\frac{17}{27}\right) \\ \cdot\frac{75}{101} \end{array}$$

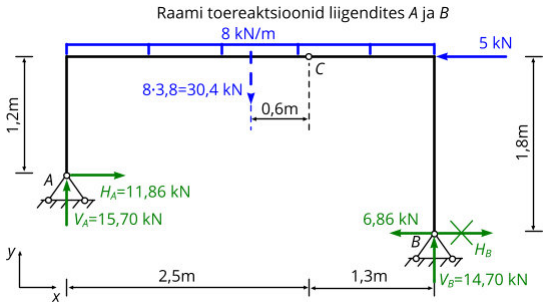
Võrrandisüsteemi lahendid on:

$$V_B = \frac{7426}{505} \approx 14.70 \text{ kN}$$

$$H_B = -\frac{4891}{675} + \frac{7}{270} \cdot \frac{7426}{505} = -\frac{2080}{303} \approx -6.86 \text{ kN}$$

$$V_A = \frac{5172}{85} - \frac{16}{17} \cdot \left(-\frac{2080}{303}\right) - \frac{55}{17} \cdot \frac{7426}{505} = \frac{7926}{505} \approx 15.70 \text{ kN}$$

$$H_A = \frac{19}{12} \cdot \frac{7926}{505} - \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2080}{303}\right) - \frac{19}{12} \cdot \frac{7426}{505} = \frac{3595}{505} \approx 11.86 \text{ kN}$$



Kontrollime leitud lahendeid kogu raami korral.

$$\sum_i F_{ix} = 11.86 - 6.86 - 5 = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 15.70 + 14.70 - 8 \cdot 3.8 = 30.4 - 30.4 = 0$$

$$\sum_i M_{izC} = 11.86 \cdot 1.2 - 15.70 \cdot 2.5 - 6.86 \cdot 1.8 + 14.70 \cdot 1.3 + 8 \cdot 3.8 \cdot 0.6 =$$

$$= -0.016 \approx 0$$

Viimases jääkliige on väike ja seotud lõppvastuste ümardamisega.

2.4. Vektorruum, lineaarne sõltuvus, baas

Ül 2.34. Vaatame n-mõõtmelisi vektoreid vektorruumist $\mathbb{C}^n$ st. kõiki veeruvektoreid kujul $(v_1, \ldots, v_n)^t$, kus $v_1, \ldots, v_n$ on kompleksarvud. Defineerime hulgal **hermiitilise skalaarkorrutise** eeskirjaga

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_2} + u_1\overline{v_2} + \ldots + u_n\overline{v_n},$$

kus $u, v \in \mathbb{C}^n$. Näidake, et kehtivad järgmised omadused:

1. $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ iga $u \in \mathbb{C}^n$ korral ja $\langle u, u\rangle = 0$ parajasti siis, kui u on nullvektor,
2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ iga $u, v \in \mathbb{C}^n$ korral,
3. $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle u, w\rangle$ iga $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ ning kompleksarvude a ja b korral,
4. $\langle u, av + bw\rangle = \bar{a}\langle u, v\rangle + \bar{b}\langle u, w\rangle$ iga $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ ning kompleksarvude a ja b korral.

Lahendus. Elementaarne avaldiste teisendamine ja definitsiooni kasutamine.

Ül 2.35. Vaatame vektorruumi $\mathbb{C}^n$, millel on defineeritud **hermiitilise skalaarkorrutis** (vt. ülesanne (2.34) hermiitiline skalaarkorrutis). Tähistame

$$\begin{aligned} Z_0 &= (1,1,1,\ldots,1),\\ Z_1 &= (1,\zeta,\zeta^2,\ldots,\zeta^{n-1}),\\ Z_2 &= (1,\zeta^2,\zeta^4,\ldots,\zeta^{2(n-1)}),\\ &\vdots\\ Z_{n-1} &= (1,\zeta^{n-1},\zeta^{2(n-1)},\ldots,\zeta^{(n-1)(n-1)}), \end{aligned}$$

kus $\zeta = e^{i2\pi/n}$. Näidake, et

$$\langle Z_k, Z_l\rangle = \begin{cases} n, & \text{kui } k = l;\\ 0, & \text{kui } k = l \end{cases}$$

ja iga vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ korral kehtib

$$\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, Z_0\rangle}{n} Z_0 + \frac{\langle \mathbf{v}, Z_1\rangle}{n} Z_1 + \ldots + \frac{\langle \mathbf{v}, Z_{n-1}\rangle}{n} Z_{n-1}.$$

Lahendus. Avaldiste teisendamine ja seose $\zeta^n = 1$ kasutamine. Vektorite $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ ortogonaalsusest järeldub lineaarne sõltumatus. Olgu $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ nullvektorist erinev vektor, siis leiduvad üheselt määratud kompleksarvud $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, et

$$\mathbf{v} = c_0 Z_0 + c_1 Z_1 + \ldots + c_{n-1} Z_{n-1}.$$

Kui $0 \leqslant k < n$, siis

$$\langle \mathbf{v}, Z_k\rangle = c_0\langle Z_0, Z_k\rangle + \ldots + c_k\langle Z_k, Z_k\rangle + \ldots c_{n-1}\langle Z_{n-1}, Z_k\rangle = c_k n.$$

Kui $\mathbf{v}$ on nullvektor, siis on ilmne et $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$.

Ül 2.36. Vaatame perioodilist diskreetset signaali, mida ühe perioodi ulatuses saame esitada vektorina $\mathbf{u} = (1, 3, 5, 7)$. Selle signaali periood on $n = 4$. Leidke vektori $\mathbf{u}$ esitus kujul

$$\mathbf{u} = c_0 Z_0 + c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + c_3 Z_3,$$

kus Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 on ülesandes (2.35) defineeritud **ortogonaalse baasi** vektorid ruumis $\mathbb{C}^n$.

Lahendus. Kuna $n = 4$, siis $\zeta = e^{i2\pi/4} = i$ ja

$$\begin{aligned} Z_1 &= (1,\ \ i, -1, -i), \\ Z_2 &= (1, -1,\ \ 1, -1), \\ Z_3 &= (1,\ -i, -1,\ \ i). \end{aligned}$$

Seega

$$\langle \mathbf{u}, Z_0 \rangle = 16, \quad \langle \mathbf{u}, Z_1 \rangle = -4 + i4, \quad \langle \mathbf{u}, Z_2 \rangle = -4, \quad \langle \mathbf{u}, Z_3 \rangle = -4 - i4$$

ja

$$\mathbf{u} = 4Z_0 + (-1 + i)Z_1 + (-1)Z_2 + (-1 - i)Z_3.$$

Signaalitöötluses vaadatakse skalaarkorrutistest moodustatud vektorit

$$\hat{u} = (\langle \mathbf{u}, Z_0 \rangle, \langle \mathbf{u}, Z_1 \rangle, \langle \mathbf{u}, Z_2 \rangle, \langle \mathbf{u}, Z_3 \rangle),$$

mida nimetatakse signaali **u diskreetse Fourier' teisenduse vektorkujuks**.

Ül 2.37. Leida tabeliga (2.20) esitatud funktsiooni lineaarne interpolant.

Lahendus. Selgitame kõigepealt vajalikke mõisteid. Kui mõõtmiste või arvutamiste teel on saadud funktsiooni väärtused lõpliku arvu argumendi väärtuste korral, siis on seda funktsiooni võimalik esitada tabeli kujul, kus ühes reas on argumendi väärtused ja teises reas on vastavad funktsiooni väärtused. Näiteks, kui maantee projekteerimisel on mõõdetud maapinna kõrgust mitmes erinevas punktis, siis saab moodustada tabeli, mille ühes reas on horisontaalse koordinaadi väärtused ja teises reas on vastavad kõrguse väärtused. Või näiteks, kui hoone sisetemperatuuri on mõõdetud erinevatel ajahetkedel, siis saab luua tabeli, mille ühes reas on aja väärtused ja teises reas on vastavad temperatuuri väärtused.

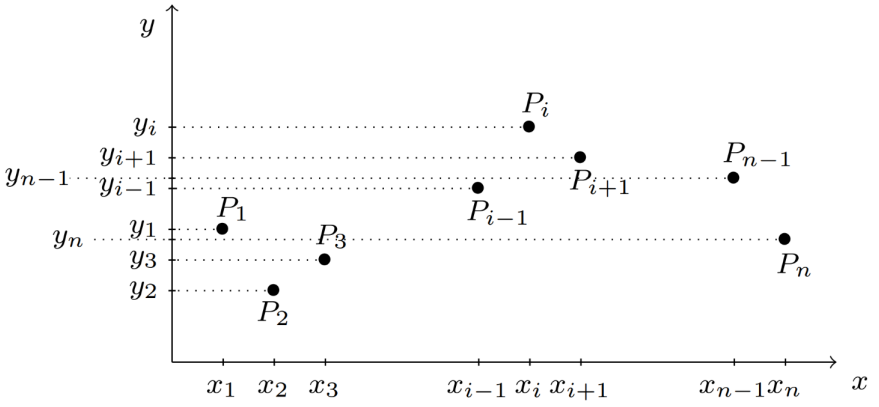
Olgu antud argumendi x väärtused $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ ja järgmine tabel neile vastavatest funktsiooni $y(x)$ väärtustest:

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{array}. \tag{2.20}$$

Lihtsuse mõttes olgu argumentide väärtuste vahed konstantsed ja võrdsed arvuga h, st

$$x_i - x_{i-1} = h \text{ iga } i = 2, \ldots, n \text{ korral.}$$

Punktid $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots .n$, moodustavad järjestatud punktihulga tasandil. Seda on illustreeritud järgmisel joonisel:



Joonis 2.10: Järjestatud punktihulk tasandil

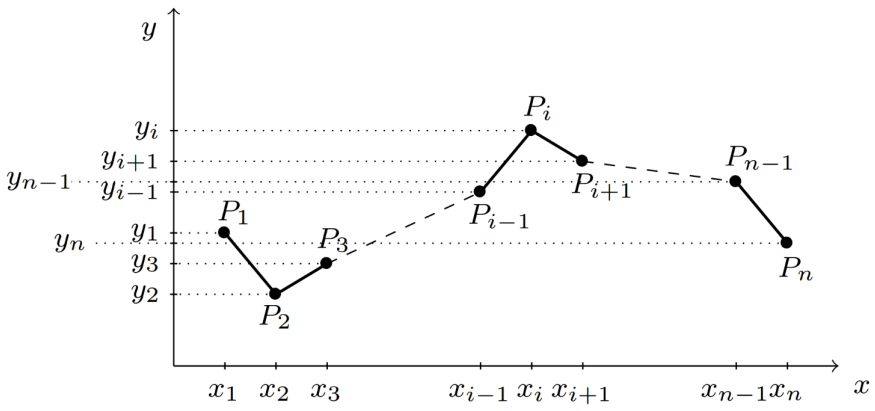
Sageli on vaja jätkata funktsiooni tabelis olevate argumendi väärtuste vahele. Taolist tegevust nimetatakse interpoleerimiseks. Pidevat funktsiooni $S(x)$, mis on määratud lõigul $[x_1, x_n]$ ja rahuldab tingimusi

$$S(x_i) = y_i, \ i = 1, \ldots, n \tag{2.21}$$

nimetatakse tabelile (2.20) vastavaks interpolandiks. Interpolandi graafik on joon, mis algab punktist P_1, läbib punkte $P_2, \ldots, P_{n-1}$ ja lõpeb punktis P_n.
Lihtsaim interpolant on tükiti lineaarne. See on funktsioon $S(x)$, mis on lineaarne igal osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, \ldots, n$, ja rahuldab eelpoolmainitud tingimusi (2.21).

Tükiti lineaarse interpolandi graafik koosneb punkte $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ühendavatest sirglõikudest. Näiteks joonisel (2.10) toodud tabelile vastava tükiti lineaarse interpolandi graafik on kujutatud joonisel (2.11).

Pliiatsi ja joonlaua abil on tükiti lineaarset interpolanti lihtne joonistada. Kuid taolise funktsiooni kasutamiseks arvutis on ta vaja programmeerida. Enamasti tehakse seda nii, et interpolant esitatakse teatavate baasifunktsioonide lineaarkombinatsioonina. Kui baasifunktsioonid on programmeeritud, siis on nende lineaarkombinatsiooni arvutustes lihtne kasutada.
Siit liigume edasi alljärgneva ülesande juurde.



Joonis 2.11: Lineaarne interpolant

Olgu $\mathcal{S}$ kõigi punktihulgal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ määratud pidevate tükiti lineaarsete funktsioonide hulk, st iga funktsioon S hulgast $\mathcal{S}$ rahuldab järgmisi tingimusi:

$$S(x) \text{ on lineaarne igal osalõigul } [x_{i-1}, x_i],\ i = 2, \ldots, n,$$
$$S(x) \text{ on pidev.}$$

Ilmselt on hulk $\mathcal{S}$ kinnine liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes, st

$$S_1,\ S_2 \in \mathcal{S} \ \Rightarrow\ S_1 + S_2 \in \mathcal{S}$$

ja

$$\lambda \in \mathbb{R},\ S \in \mathcal{S} \ \Rightarrow\ \lambda S \in \mathcal{S}.$$

On võimalik näidata, et need tehted rahuldavad vektorruumi aksioome, seega on $\mathcal{S}$ vektorruum.

Ülesanne on järgmine: leida ruumi $\mathcal{S}$ dimensioon ja üks võimalik baas selles ruumis.

Vihje. Olgu $S \in \mathcal{S}$. Tähistame

$$y_i = S(x_i),\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Võrdustega (2.22) on defineeritud üksühene vastavus ruumi $\mathcal{S}$ kuuluvate funktsioonide S ja ruumi $\mathbb{R}^n$ kuuluvate vektorite $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vahel. Sellest on lihtne aru saada eespooltoodud jooniste abil. Joonisel (2.10) on kujutatud y-koordinaatide vektorile $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vastavad punktid tasandil. Kui nende vahele tõmmata sirglõigud, saame funktsiooni S, mis on kujutatud joonisel (2.11). Kui me aga vastupidi lähtume funktsioonist S, mis on kujutatud joonisel ((2.11)) ja kustutame ära punkte ühendavad sirglõigud, siis jäävad järgi punktid, mille y-koordinaadid moodustavad vektori $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Nüüd jääb üle leida vastused ülesandes antud küsimustele vektorruumis $\mathbb{R}^n$ ja kasutada mainitud üksühest vastavust.

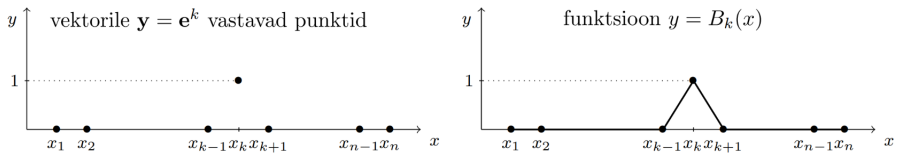
Lahendus. Kuna $\mathbb{R}^n$ dimensioon on n, siis on ka $\mathcal{S}$ dimensioon n. Ruumis $\mathbb{R}^n$ saab moodustada järgmise baasi:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}^1 = (1,0,0\ldots,0,0),\\
&\mathbf{e}^2 = (0,1,0,\ldots,0,0),\\
&\ldots\\
&\mathbf{e}^n = (0,0,0\ldots,0,1).
\end{aligned}$$

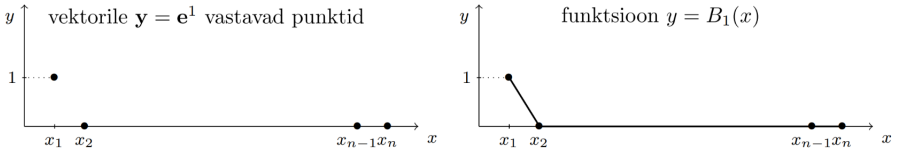
Vektorile $\mathbf{e}^k \in \mathbb{R}^n$ vastav funktsioon $B_k \in \mathcal{S}$ ongi baasifunktsiooniks ruumis $\mathcal{S}$. Tingimuse (2.22) põhjal

$$B_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{kui } k = i,\\ 0 & \text{kui } k \neq i. \end{cases}$$

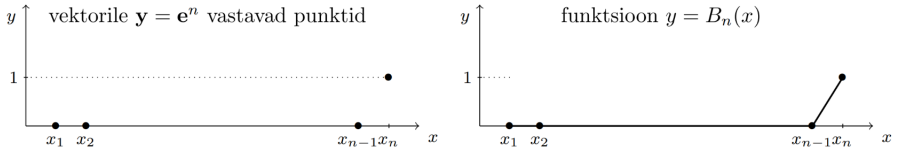
Järgnevatel joonistel on kujutatud vektoritele $\mathbf{y} = \mathbf{e}^k$, $k = 1,\ldots,n$, vastavaid baasifunktsioone.



Juht $k = 2,\ldots,n-1$



Juht $k = 1$



Juht $k = n$

Funktsioonide $B_k(x)$ valemid:

$$B_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{h} & \text{kui } x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{x_{k+1}-x}{h} & \text{kui } x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0 & \text{mujal} \end{cases}$$

juhul $k = 2, \ldots, n-1$ ja

$$B_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2-x}{h} & \text{kui } x \in [x_1, x_2], \\ 0 & \text{mujal,} \end{cases} \qquad B_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h} & \text{kui } x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0 & \text{mujal.} \end{cases}$$

Lõpuks, tabelile (2.20) vastav interpolant on esitatav järgmise lineaarkombinatsioonina baasifunktsioonidest B_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k B_k(x). \tag{2.23}$$

Vastus: Baasli $B_k(x)$ avaldub lineaarne interpolant kujul (2.23).

Ül 2.38. Uuritakse pikkusega L tala vabavõnkumist, kus üks ots on jäigalt kinnitatud ja teine vaba. Eeldatakse, et tala võnkumine on antud funktsiooniga

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

kus $w(x,t)$ on tala läbipaine asukohal x ajahetkel t ning $a_n(t)$ on ajas muutuv amplituud n-nda realiikme jaoks. Näita, et funktsioonid

$$\Psi_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad (n = 1, 2, ...)$$

moodustavad ortogonaalse baasi funktsioonide ruumis $L^2(0, L)$, kus on määratud skalaarkorrutis

$$< f, g >= \int_0^L f(x)g(x)dx.$$

Funktsioone f ja g nimetatakse ortogonaalseteks kui $< f, g >= 0$. Leida ka ortonormeeritud baas.

Lahendus. Olgu

$$\Psi_m(x) = \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L} \quad (m = 1, 2, ...), \quad \Psi_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Arvutame skalaarkorrutise

$$< \Psi_m(x), \Psi_n(x) >= \int_0^L \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Kasutame trigonomeetrilist seost

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$< \Psi_m(x), \Psi_n(x) >= \frac{1}{2}\int_0^L \Big[\cos\frac{(2m-2n)\pi x}{2L} - \cos\frac{(2m+2n-2)\pi x}{2L}\Big] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{2L}{(2m-2n)\pi}\sin\frac{(2m-2n)\pi x}{2L}\Big|_0^L - \frac{2L}{(2m+2n-2)\pi}\sin\frac{(2m+2n-2)\pi x}{2L}\Big|_0^L\Big] = 0.$$

Seega funktsioonid on ortogonaalsed. Kui $n = m$, siis skalaarkorrutis on

$$< \Psi_n(x), \Psi_n(x) >= \int_0^L \sin^2\frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Kasutame trigonomeetrilist seost

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$< \Psi_n(x), \Psi_n(x) >= \frac{1}{2}\int_0^L \Big[1-\cos\frac{2(2n-1)\pi x}{2L}\Big] dx = \frac{L}{2} - \frac{2L}{2(2n-1)\pi}\sin\frac{2(2n-2)\pi x}{2L}\Big|_0^L = \frac{L}{2}.$$

Ortonormeeritud baas on

$$\tilde{\Psi}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\Psi_n(x).$$

2.5. Afiinne ruum

Mittetühja hulka $\mathbb{A}$ nimetatakse ***afiinseks ruumiks*** kui sellega on seotud vektorruum $\mathbb{V}$ ja kujutus

$$\tau : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}, \quad (A, B) \longmapsto \tau(A, B) = \mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$$

nii, et kehtivad järgmised tingimused:

1° iga $A \in \mathbb{A}$ ja iga $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ leidub $B \in \mathbb{A}$, nii et $\tau(A, B) = \mathbf{a}$

2° iga $A, B, C \in \mathbb{A}$ kehtib võrdus $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Hulga $\mathbb{A}$ elemente nimetatakse ***punktideks*** ja sellega seotud vektorruumi $\mathbb{V}$ nimetatakse afiinse ruumi ***sihiruumiks***.

Afiinset ruumi $\mathbb{A}_n$ nimetatakse n-mõõtmeliseks, kui selle sihiruumiks on n-mõõtmeline vektorruum $\mathbb{V}_n$.

Hulka $\mathfrak{R} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, mis koosneb afiinse ruumi mingist punktist O ja sihiruumi $\mathbb{V}_n$ baasist $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, nimetatakse ***reeperiks***. Reeper määrab affinses ruumis koordinaatide süsteemi, mille alguspunktiks on punkt O ja koordinaattelgedeks on alguspunkti läbivad baasivektorite sihilised sirged.

Reeperi $\mathfrak{R}$ punkti O ja punkti X ühendavat vektorit $\overrightarrow{OX}$ nimetatkase punkti X ***kohavektoriks***. Punkti X ***koordinaatideks*** reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes nimetatakse selle kohavektori $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ koordinaate sihiruumi baasi suhtes, so

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \quad \Leftrightarrow \quad X(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Rakendades afiinse ruumi punktist X_0 vektorit $\mathbf{s}$, siis afiinse ruumi tingimuse 1° tõttu satume üheselt määratud punkti X, et

$$\overrightarrow{OX_0} + \mathbf{s} = \overrightarrow{OX} \qquad \text{ehk} \qquad \mathbf{x_0} + \mathbf{s} = \mathbf{x},$$

kus $\mathbf{x_0}$ ja $\mathbf{x}$ on vastavalt punktide X_0 ja X kohavektorid. Asendades viimases vektori $\mathbf{s}$ kollineaarse vektoriga $t\,\mathbf{s}$ saame

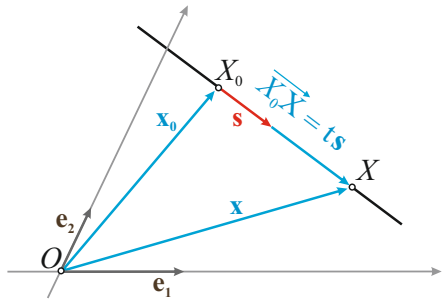
$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + t\,\mathbf{s}, \quad \text{kus} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Võrrand (2.24) on ***vektorvõrrand sirgele***, millel on punkt X_0 ja sihivektor vektor $\mathbf{s}$. Reaalarvu t nimetatakse sirge parameetriks. Joonisel 2.12 on kujutatud afiinse ruumi $\mathbb{A}_2$ reeper $\mathfrak{R} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ja võrrandiga (2.24) määratud sirge.

Afiinset ruumi, mille sihiruumiks on eukleidilne vektorruum[1], nimetataksese ***eukleidiliseks punktiruumiks***.

Afiinses ruumis saame lahendada ülesandeid, mis on seotud ruumi punktide paigutuse ja punktidega seotud sihiruumi vektorite lineaarse sõltuvuse ja sõltumatusega. Sellised on näiteks lõikude paralleelsuse ja kujundite sarnasusega seotud ülesanded.

[1] Vektorruumi nimetatakse eukleidiliseks, kui selles on defineeritud vektorite skalaarkorrutamine. See võimaldab defineerida meetrika, so pikkused, nurgad, pindalad, ruumalad jne.



Joonis 2.12: Sirge afiinses ruumis $\mathbb{A}_2$ ehk afiinsel tasandil

Kokkuvõtlikult võime öelda, et afiinses ruumis ei ole mõõtmist.

Ül 2.39. Konstruktsioonelemendi tasandilisel lõikel on punkt $P(3,\,4)$, millega on seotud pingevektor $\vec{\sigma}_P = (5, -2)$ MPa. Lõike punktis $Q(7,\,10)$ on pingevektor $\vec{\sigma}_Q = (9, 0)$ MPa. Leidke punktide P ja Q vaheline pingevektor $\vec{\sigma}$ kui on teada, et pinge muutub lineaarselt. Arvutage pingevektori koordinaadid punktis $R(5,\,7)$.[a]

[a] Afiinses ruumis puudub meetrika, siis siin mõõtühikuid ei ole olulised.

Lahendus. Afiinses ruumis on eespool toodud viisil seotud punktid ja vektorid. Olgu punkti P kohavektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ ja punkti Q kohavektor $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$. Siis punkte P ja Q ühendav vektor

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}.$$

Olgu lõiku PQ kuuluvate punktide kohavektor $\vec{x}$, siis võrrandi (2.24) põhjal

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}) = (1 - \lambda)\vec{p} - \lambda\vec{q}, \tag{2.25}$$

kus reaalarvuline parameeter $\lambda \in [0, 1]$.

Kui vektorväärtus (nt pinge) muutub punktide vahel lineaarselt, siis vahepealses punktis kehtib

$$\vec{\sigma} = (1 - \lambda)\vec{\sigma}_P + \lambda \cdot \vec{\sigma}_Q.$$

Vastavalt ülesandele tingimustele on punktide P ja Q vaheline suunavektor on

$$\overrightarrow{QP} = \vec{q} - \vec{p} = (7 - 3,\, 10 - 4) = (4,\, 6).$$

Leiame punktile R vastava parameetri λ väärtuse. Selleks kasutame võrrandit (2.25)

$$(5,\, 7) = (3,\, 4) + \lambda(4,\, 6) = (2 + 4\lambda,\, 4 + 6\lambda),$$

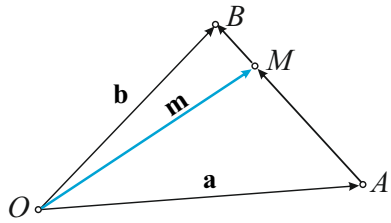
millest järeldub, et $\lambda = 0.5$ ja punkt R on lõigu PQ keskpunkt. Pingevektor punktis R

$$\vec{\sigma}_R = (1-\lambda)\vec{\sigma}_P + \lambda \cdot \vec{\sigma}_Q = 0.5 \cdot (5,-2) + 0.5 \cdot (9,0) = (7,\,-1).$$

Vastus: Pingevektori koordinaadid punktis R on $\vec{\sigma}_R = (7,\,-1)$.

Ül 2.40. Olgu afiinse ruumi punktide A ja B kohavektorid vastavalt $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, kus O on afiinse koordinaatide süsteemi alguspunkt. Öeldakse, et punkt M jagab lõiku AB suhtes λ kui $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. Leida punkti M kohavektor.

Lahendus. Olgu otsitava punkti M kohavektor $\mathbf{m} = \overrightarrow{OM}$.



Kolmnurga reegli põhjal võime kirjutada

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB}$$

ehk

$$\mathbf{a} + \overrightarrow{AM} = \mathbf{m} \quad \text{ja} \quad \mathbf{m} + \overrightarrow{MB} = \mathbf{b}.$$

Viimasest leiame, et

$$\overrightarrow{AM} = \mathbf{m} - \mathbf{b} \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{MB} = \mathbf{b} - \mathbf{m}.$$

Kasutades lõigu AB jagamise tingimust $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, saame

$$\mathbf{m} - \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{m}) \quad \Rightarrow \quad (1+\lambda)\mathbf{m} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$

ehk

$$\mathbf{m} = \frac{1}{1+\lambda}(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}). \tag{2.26}$$

Erijuhul, kui $\lambda = 1$, saame lõigu AB keskpunkti kohavektori

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}). \tag{2.27}$$

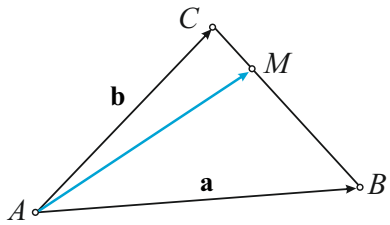
Vastus: Punkt M, mille kohavektor on (2.26), jagab lõiku AB suhtes λ.

Ül 2.41. On antud kolmnurk ABC. Punkt M jagab kolmnurga külge BC suhtes $\lambda : \mu$, st $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Avaldada vektor $\overrightarrow{AM}$ vektorite $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ ja $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$ lineaarse kombinatatsioonina.

Lahendus. Kuna punkt M jagab külge BC suhtes $\lambda : \mu$, siis

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{MC}.$$

$$\overrightarrow{AM} = \mathbf{a} + \overrightarrow{BM} \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{AM} = \mathbf{b} - \overrightarrow{MC}.$$



Leiame vektori $\overrightarrow{MC}$

$$\mathbf{a} + \frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{MC} = \mathbf{b} - \overrightarrow{MC} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right)\overrightarrow{MC} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MC} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Lõpuks saame

$$\overrightarrow{AM} = \mathbf{b} - \frac{\mu}{\lambda + \mu}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\mathbf{b}.$$

Märkus. Kasutates valemit (2.26) jõuaksime sama tulemuseni, sest siis kolmnuga tipp A oleks afiinse koordinaatide süsteemi alguspunktiks.

Vastus: Otsitav lineaarkombinatsioon $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}\mathbf{a} + \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\mathbf{b}$.

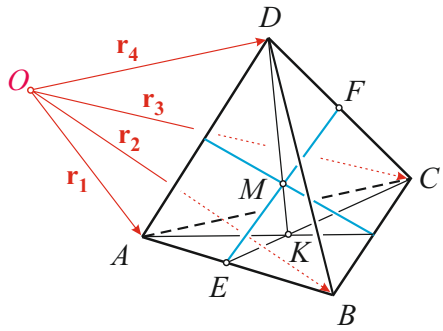
Ül 2.42. Tõestada, et:

1) lõikudel, mis ühendavad tetraeedri vastastikuste servade keskpunkte, on ühine lõikepunkt ja see punkt jagab need lõigud pooleks;

2) see punkt on samuti ühine lõikudele, mis ühendavad tetraeedri tippe vastastikuste tahkude raskuskeskmetega, kusjuures see lõikepunkt jagab need lõigud suhtes 3 : 1, lugedes tetraeedri tipust.

Lahendus. Olgu O afiinse ruumi koordinaatidesüsteemi alguspunkt[2]. Tähistame tetraeedri $ABCD$ tippude kohavektorieid järgmiselt:

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_3, \quad \overrightarrow{OD} = \mathbf{r}_4.$$



1) Olgu E ja F servade AB ja CD keskpunktid ning M lõigu EF keskpunkt. Siis valemite (2.27) põhjal

$$\overrightarrow{OE} = \mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2},$$
$$\overrightarrow{OF} = \mathbf{r}_F = \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{2},$$
$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_E + \mathbf{r}_F}{2} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4}{4}.$$

Avaldise $\mathbf{r}_M$ sümmeetriast vektorite $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ suhtes, mis lähtuvad punktist O tetraeedri tippudesse, järeldame, et punkt M on ka kahe teise vastastikuste servapaaride keskpunkte ühendavate lõikude keskpunkt.

2) Olgu K kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt. Siis selle kohavektor on

$$\overrightarrow{OK} = \mathbf{r}_K = \frac{1}{3}\big(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3\big).$$

[2]Koordinaatide algusunktiks O võib olla afiinse ruumi suvaline punkt.

Tähistame G-ga suunatud lõigu DK punkti, mis jagab selle suhtes $3:1$. Seega $\overrightarrow{DG} = 3\overrightarrow{GK}$ ja punkti G kohavektori $\overrightarrow{OG} = \mathbf{r}_G$ leidmiseks saame kasutada valemit (2.26), milles $\mathbf{a} = \mathbf{r}_4$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_K$ ning $\lambda = 3$, seega

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{4}\big(\mathbf{r}_4 + 3\mathbf{r}_K\big).$$

Nüüd leiame, et

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{4}\big(\mathbf{r}_4 + 3 \cdot \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)\big) = \frac{1}{4}\big(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4\big). \tag{2.28}$$

Viimasest näeme, et punktis G lõikuvad kõik neeed lõigud, mis ühendavad tetraeedri tippe vastastahkude raskuskeskmetega ja see langeb kokku eelnavalt leitud punktiga M.

Kui teraeeder on ühtlase massijaotusega keha, siis selle raskuskekskme G kohavevektor on leitav valemiga (2.28).

2.6. Sirged ja tasandid

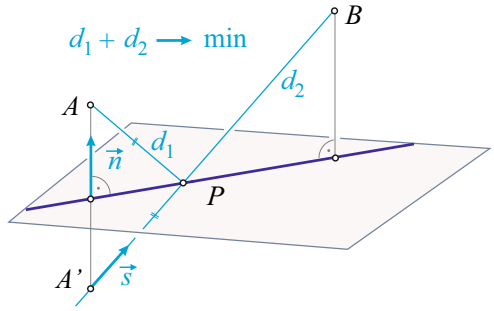
Ül 2.43. Tasandil $2x - 3y + 3z - 17 = 0$ leida niisugune punkt P, mille kauguste summa punktidest $A(3, -4, 7)$ ja $B(-5, -14, 17)$ oleks minimaalne.

Lahendus. Kõigepealt uurime, kuidas need punktid tasandi suhtes paiknevad. Selleks, asetame punktide koordinaadid tasandi võrrandisse

$$\begin{aligned} A \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) + 3 \cdot 7 - 17 = 22 > 0 \\ B \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-14) + 3 \cdot 17 - 17 = 66 > 0 \end{aligned}$$

Tasand jagab ruumi kaheks poolruumiks ja need punktid on samas pooruumis, sest mõlemal juhul saime sama märgiga võrratuse.

Juhul, kui need punktid oleksid erinevates poolruumides, siis otsitav punkt P on sirge AB ja tasandi lõikepunkt.



Joonis 2.13: Minimaalne kauguste summa

Sellise olukorra tekitamiseks leiame ühe punkti, näiteks punktiga A, sümmeetrilise punkti tasandi suhtes. Koostame kõigepealt võrrandi sirgele, mis läbi punkti A ja on risti tasandiga, so punkti A projekteeriva sirge võrrandi

$$\begin{cases} x = \quad 3 + 2t, \\ y = -4 - 3t, \\ z = \quad 7 + 3t. \end{cases}$$

Leiame selle sirge ja tasandi lõikepunkti

$$2(3 + 2t) - 3(-4 - 3t) + 3(7 + 3t) - 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad 22 + 22t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

Järelikult, projekteerival sirgel, punktiga A sümmeetriline punkt A', vastab parameetri väärtusele $t = -2$. Seega

$$A'(-1, 2, 1)$$

ning sirge $A'B$ sihivektor $\vec{s}$ on kollineaarne vektoriga

$$\overrightarrow{A'B} = (-4, -16, 16) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{s} = (\,1, 4, -4\,).$$

Sirge $A'B$ parameetrilsed võrrandid on

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 1 - 4t. \end{cases}$$

Otsitav punkt P on selle sirge ja tasandi lõikepunkt

$$2(-1+t) - 3(2+4t) + 3(1-4t) - 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad -22t - 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1,$$

millest $P(-2, -2, 5)$.

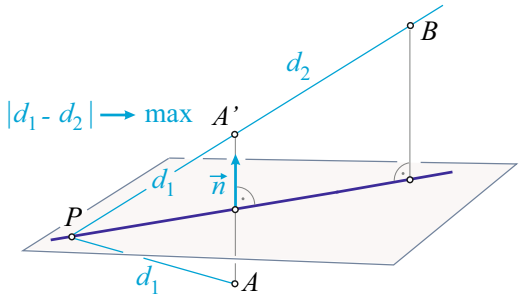
Vastus: Otsitav punkt on $P(-2, -2, 5)$.

Ül 2.44. Tasandil $2x + 3y - 4z - 15 = 0$ leida niisugune punkt P, mille kauguste vahe absoluutväärtus punktidest $A(5,\ 2,\ -7)$ ja $B(7,\ -25,\ 10)$ oleks maksimaalne.

Lahendus. Kõigepealt uurime, kuidas need punktid tasandi suhtes paiknevad. Selleks, asetame punktide koordinaadid tasandi võrrandisse

$$\begin{aligned} A \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7) - 15 = 29 > 0 \\ B \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 7 + 3 \cdot (-25) - 4 \cdot 10 - 15 = -116 < 0 \end{aligned}$$

Tasand jagab ruumi kaheks poolruumiks ja need punktid on erinevates poolruumides, sest mõlemal juhul saime erinava märgiga võrratuse.



Joonis 2.14: Maksimaalne kauguste vahe, $d_1 = AP$ ja $d_2 = BP$.

Peegeldame punkti A punktiga B samasse poolruumi, so leiame punktiga A sümmeetrilise punkti tasandi suhtes. Sümmeetriline punkt A' asub projekteerival sirgel

$$\begin{cases} x = \ \ 5 + 2t, \\ y = \ \ 2 + 3t, \\ z = -7 - 4t. \end{cases}$$

Leiame selle sirge ja tasandi lõikepunkti

$$2(5 + 2t) + 3(2 + 3t) - 4(-7 - 4t) - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad 29 + 29t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1.$$

Järelikult, projekteerival sirgel, punktiga A sümmeetriline punkt A', vastab parameetri väärtusele $t = -2$. Seega

$$A'(1,\ -4,\ 1)$$

ning sirge $A'B$ sihivektor $\vec{s}$ on kollineaarne vektoriga

$$\overrightarrow{A'B} = (6,\ -21,\ 9\,) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{s} = (\,2,\ -7,\ 3\,).$$

Sirge $A'B$ parameetrilsed võrrandid on

$$\begin{cases} x = \ \ 1 + 2t, \\ y = -4 - 7t, \\ z = \ \ 1 + 3t. \end{cases}$$

Otsitav punkt P on selle sirge ja tasandi lõikepunkt[3]

$$2(1 + 2t) + 3(-4 - 7t) - 4(1 + 3t) - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad -29t - 29 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1,$$

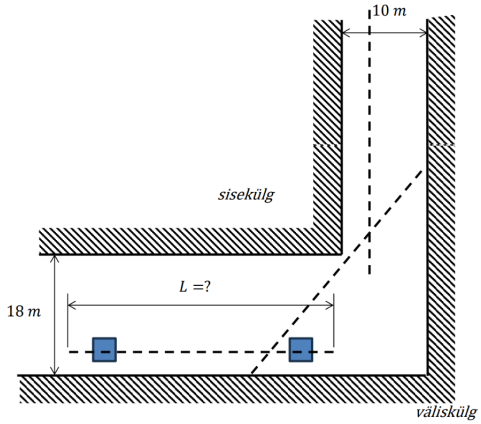
millest $P(-1,\ 3,\ -2)$.

Märkus. Punkti P saaksime ka siis, kui projekteeriksime punkti B punktiga A samasse poolruumi. Kontrollige!

Vastus: Otsitav punkt on $P(-1,\ 3,\ -2)$.

[3] Kolmnurga võrratusest järeldub, et ülesandes kirjeldatud vahe on masksimaalne siis, kui punktid A, B ja P on ühel sirgel ning see on võrdne lõigu AB pikkusega, so $|AP - BP| = AB$.

Ül 2.45. Linnapiirkonnas on vaja transportida pikemat konstruktsioonielementi. Transpordiks planeeritud tee kulgeb läbi 90° pöördega kitseneva tänavalõigu, kus 18 m laiune tänav läheb üle 10 m laiuseks tänavaks (vt joonis 2.15). Tänava laiuse all on mõeldud tänava reaalset laiust, millest üle transporditav konstruktsioonielement minna ei saa. Transpordi planeerimiseks oleks vaja leida detaili maksimaalne teoreetilist pikkus, et detailide valmistamisel saaks arvestada transpordipikkusele esitatavete piirangutega. Detaile transporditakse spetsiaalsete transpordiplatvormiga, mis võimaldavad sujuvat liikumist kõikides suundades.



Joonis 2.15: Tänava pööre

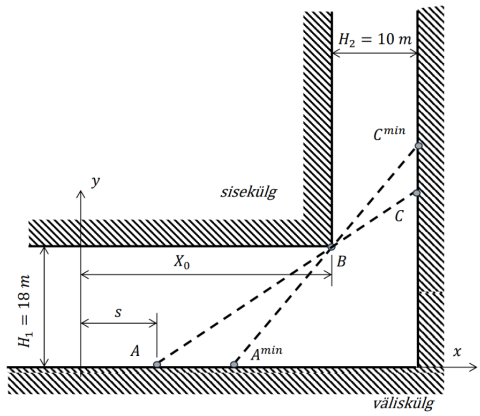
Lahendus. Tegemist on optimeerimisülesandega, millele esitame kaks lahendust.

A) Kõige kriitilisem hetk on tõenäoliselt siis, kui konstruktsiooni keskosa puutub kokku tänava pöörde siseküljel oleva nurgaga B ja konstruktsiooni otsad vastavalt tänava pöörde välisküljel olevate punktidega A ja C (vt joonis 2.16).

Vaatame kõiki sirgeid lõike, mis algavad laiema tänava välisküljelt, läbivad punkti B ja lõpevad kitsama tänava välisküljel. Sellisel juhul on kõige lühem lõik AB see, mis määrab ära transporditava detaili maksimaalse pikkuse. Seega on vaja leida seos lõigu asendi ja lõigu pikkuse vahel ning leida sellest seosest lõigu minimaalne pikkus.

Valime lõigu asendi määramiseks parameetri s ja hakkame seda mõõtma koordinaatide alguspunktist, mis on pöördekoha sisenurgast nihutatud kaugusele X_0.

Määrame lõigu AC pikkuse vektori abil. Vektor peab olema sellise sihiga, et see läbiks



Joonis 2.16: Tänava pööre

alati punkti B. Selleks määrame esmalt punktide A ja B koordinaadid. Need on

$$A(s,\,0) \quad \text{ja} \quad B(X_0,\,H_1),$$

seega neid punkte ühendava vektori koordinaadid on

$$\overrightarrow{AB} = (X_0 - s,\,H_1).$$

Vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ on kollineaarsesd, st $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Teisiti öeldes, punktid A, B ja C asuvad alati ühel sirgel. Punkti C koordinaadid on

$$C(X_0 + H_2,\,y_c) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{AC} = (X_0 + H_2 - s,\,y_c).$$

Kollineaarsuse nõude tõttu

$$(X_0 + H_2 - s,\,y_c) = \lambda(X_0 - s,\,H_1) \quad \text{ehk} \quad \frac{X_0 + H_2 - s}{X_0 - s} = \frac{y_c}{H_1} = \lambda,$$

sest kollineaarsete vetorite koordinaadid on võrdelised.
Valime võrdeteguriks

$$\lambda = \frac{X_0 + H_2 - s}{X_0 - s},$$

siis saame vektori $\overrightarrow{AC}$ koordinaadid

$$\overrightarrow{AC} = \frac{X_0 + H_2 - s}{X_0 - s}\big(X_0 - s,\,H_1\big).$$

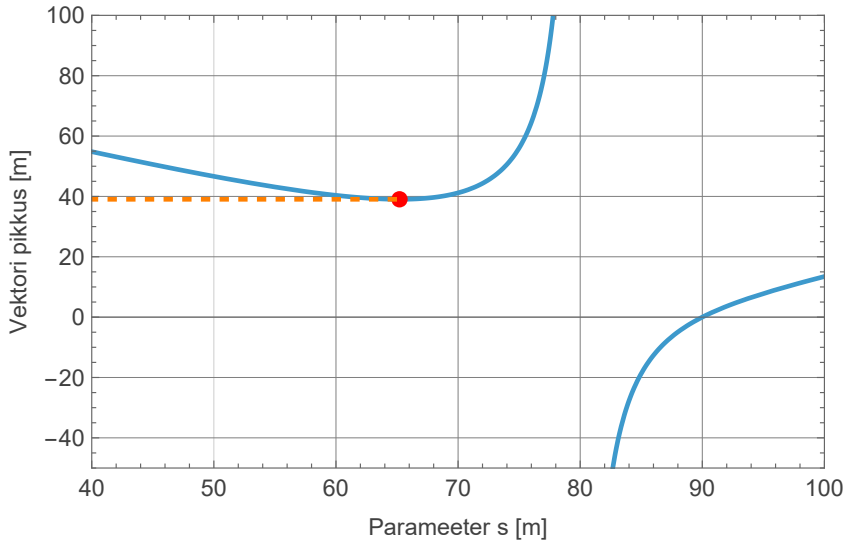
Leiame vektori $\overrightarrow{AC}$ pikkuse

$$L_{AC}(s) = \frac{X_0 + H_2 - s}{X_0 - s}\sqrt{(X_0 - s)^2 + H_1^2}\,, \tag{2.29}$$

mis on parameetri s funktsioon.

Vektori $\overrightarrow{AC}$ lühim pikkus, ehk funktsiooni $L_{AC}(s)$ minimaalne väärtus, annabki konstruktsiooni maksimaalse pikkuse, mida on võimalik pöördekohast läbi transportida.

Joonisel 2.18 on esitatud graafik, kus on kujutatud vektori $\overrightarrow{AC}$ pikkus parameetri s funktsioonina. Graafikult on näha, et eksisteerib miinimumpunkt ja selle väärtus tuleb pisut alla 40 m.



Joonis 2.17: Funktsiooni $L_{AC}(s)$ graafik

Leiame minimaalse vektori pikkuse ka analüütiliselt. Selleks võtame vektori pikkusest tuletise parameetri s järgi ja võrdsustame selle nulliga.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}L_{AC}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{X_0+H_2-s}{X_0-s}\right)\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}+\\ &\quad+\frac{X_0+H_2-s}{X_0-s}\cdot\frac{d}{ds}\left(\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}\right)=\\ &=\frac{(-1)\cdot(X_0-s)+(X_0+H_2-s)\cdot(-1)}{(X_0-s)^2}\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}+\\ &\quad+\frac{X_0+H_2-s}{X_0-s}\cdot\frac{(X_0-s)\cdot(-1)}{\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds}L_{AC}(s)=\left(\frac{-1}{X_0-s}+\frac{X_0+H_2-s}{(X_0-s)^2}\right)\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}-\frac{X_0+H_2-s}{\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}}$$

$$\frac{d}{ds}L_{AC}(s) = H_2\frac{\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}}{(X_0-s)^2} - \frac{X_0+H_2-s}{\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}} =$$
$$= \frac{H_2(X_0-s)^2 + H_2H_1^2 - (X_0+H_2-s)(X_0-s)^2}{(X_0-s)^2\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}} =$$
$$= \frac{(H_2-X_0-H_2+s)(X_0-s)^2 + H_2H_1^2}{(X_0-s)^2\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}} =$$
$$= \frac{-(X_0-s)^3 + H_2H_1^2}{(X_0-s)^2\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}}.$$

Funktsiooni $L_{AC}(s)$ minimaalse väärtuse leidmiseks tuleb lahendada võrrand

$$\frac{d}{ds}L_{AC}(s) = \frac{(s-X_0)^3 + H_2H_1^2}{(X_0-s)^2\sqrt{(X_0-s)^2+H_1^2}} = 0.$$

Viimase murru lugeja peab olema võrdne nulliga ja parameetri s määramiseks saame kuupvõrrandi

$$s^3 - 3X_0s^2 + 3X_0^2s + H_2H_1^2 - X_0^3 = 0. \tag{2.30}$$

Kuupvõrrandi (2.30) analüütiliseks tuleb sellest ellimineerida ruutliige. Selleks kasutame *Tschirnhausi* teisendust

$$s = t - \frac{-3X_0}{3} = t + X_0.$$

Teostame kuupvõrrandis muutujate vahetuse

$$(t+X_0)^3 - 3X_0(t+X_0)^2 + 3X_0^2(t+X_0) + H_2H_1^2 - X_0^3 = 0,$$

millest pärast lihtsustamist saame

$$t^3 + H_2H_1^2 = 0.$$

Saadud kuupvõrrandi ainus reaalarvuline lahend on

$$t = -\sqrt[3]{H_2H_1^2},$$

millest pärast tagasi asendamist saame parameetri s otsitava väärtuse

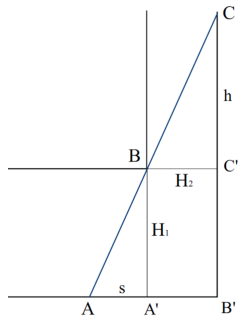
$$s = X_0 - \sqrt[3]{H_2H_1^2}.$$

Tuletatud valemist (2.29) saame leida otsitava vektori pikkuse

$$L_{AC} = \frac{H_2 + \sqrt[3]{H_2H_1^2}}{\sqrt[3]{H_2H_1^2}}\sqrt{\left(\sqrt[3]{H_2H_1^2}\right)^2 + H_1^2}\,. \tag{2.31}$$

Kasutades ülesande algandmeid, saame

$$L_{AC} = \frac{10 + \sqrt[3]{10\cdot 18^2}}{\sqrt[3]{10\cdot 18^2}}\sqrt{\left(\sqrt[3]{10\cdot 18^2}\right)^2 + 18^2} \approx 39.05\,\mathrm{m}.$$



Joonis 2.18: Tänava pööre

B) Esitame nüüd selle ülesande teise lahenduse. Selleks valime koodrdinaatide alguspunktiks punkti B (vt joonis 2.16 ja 2.18).
Siis punkti A koodinaadid on $A(-s,\,-H_1)$, seega $\overrightarrow{AB} = (s,\,H_1)$. Kuna vektorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ on kollineaarsed[4], so

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} = \frac{s+H_2}{s}\overrightarrow{AB}.$$

Vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus on $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{s^2+H_1^2}$, seega vektori $\overrightarrow{AC}$ pikkuseks saame

$$|\overrightarrow{AC}| = \frac{s+H_2}{s}\sqrt{s^2+H_1^2} = \left(1+\frac{H_2}{s}\right)\sqrt{s^2+H_1^2}.$$

Miinimumpunkti leidmiseks leiame vektori $\overrightarrow{AC}$ pikkuse avaldisest tuletise parameetri s järgi:

$$\frac{d}{ds}\left((1+\frac{H_2}{s})\sqrt{s^2+H_1^2}\right) = -\frac{H_2}{s^2}\sqrt{s^2+H_1^2} + \left(1+\frac{H_2}{s}\right)\frac{2s}{2\sqrt{s^2+H_1^2}} =$$

$$= \frac{-H_2(s^2+H_1^2)+s^2(s+H_1)}{s^2\sqrt{s^2+H_1^2}} = \frac{-s^2H_2-H_2H_1^2+s^3+s^2H_1}{s^2\sqrt{s^2+H_1^2}} = \frac{s^3-H_2H_1^2}{s^2\sqrt{s^2+H_1^2}}.$$

Kriitilisteks punktideks on $s=0$ ja $s=\sqrt[3]{H_2H_1^2}$.

Kui $s=\sqrt[3]{H_2H_1^2}$, siis on vektori $\overrightarrow{AC}$ pikkuseks

$$|\overrightarrow{AC}| = \left(1+\frac{H_2}{\sqrt[3]{H_2H_1^2}}\right)\sqrt{\sqrt[3]{H_2^2H_1^4}+H_1^2} = \frac{\sqrt[3]{H_2^2}+\sqrt[3]{H_1^2}}{\sqrt[3]{H_1^2}}\sqrt{\sqrt[3]{H_1^4}(\sqrt[3]{H_2^2}+\sqrt[3]{H_1^2})} =$$

$$= \left(\sqrt[3]{H_2^2}+\sqrt[3]{H_1^2}\right)\sqrt{\sqrt[3]{H_2^2}+\sqrt[3]{H_1^2}} = \left(\sqrt[3]{H_1^2}+\sqrt[3]{H_2^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

[4]Võrdeteguri λ leidmiseks võib kasutada sarnaseid kolmnurki $AA'B$, $BC'C$ ja $AB'C$.

Seega

$$L_{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \left(\sqrt[3]{H_1^2} + \sqrt[3]{H_2^2}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.32}$$

Kasutades ülesande algandmeid, saame

$$L_{AC} = \left(\sqrt[3]{18^2} + \sqrt[3]{10^2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 39.05\,\text{m}.$$

Tõestada, et erineval viisil leitud valemid (2.31) ja (2.32) on samaväärsed.

Vastus: Teoreetiliselt on selle tänavapöörde kaudu võimalik transportida 39 m pikkust konstruktsioonielementi, eeldades, et elemendi laius on minimaalne.

Ül 2.46. Tallinnasse on vaja paigaldada päikesepaneel nii, et see oleks suunatud päikese poole 22. detsembri keskpäeval. Arvutage päikese suunavektor ning päikesepaneeli tasandi võrrand kui 22. detsembril on päikese kõrgusnurk $\theta \approx 7.12°$.

Lahendus. Asimuut A arvestatakse tavaliselt põhjasuunast päripäeva. Kuna keskpäeval asub päike lõunasuunas, siis $A = 180^{circ}$.

Suunavektori koordinaate saame arvutada valemitega, kus x-telg on suunatud itta, y-telg põhja ja z-telg üles:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \sin A = \quad 0, \\ y &= \cos\theta \cos A = -0,992, \\ z &= \sin\theta \qquad\quad = \quad 0,124. \end{aligned}$$

Koordinaatide alguspunkti (paneeli keskpunkti) läbiva tasandi võrrand on

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0,$$

kus kordajad a, b, c on tasandi normaalvektori koordinaadid. Päikesele suunatud vektor peab olema risti päikepaneeli tasandiga, siis

$$0 \cdot x - 0,992\,y + 0,124\,z = 0,$$

ehk

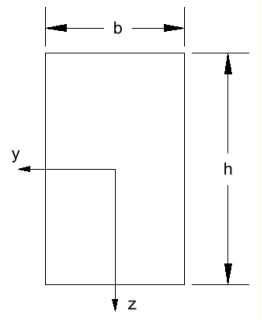
$$z = 8\,y.$$

Vastus: Päikesepaneeliga seotud koordinaatide süsteemis on paneeli tasapinna võrrand $z = 8\,y$.

Ül 2.47. Tala ristlõike mõõtmed on $b = 6$ cm ja $h = 10$ cm. Ristlõikes mõjuvad paindemomendid $M_y = 2.0$ kNm ja $M_z = -4.0$ kNm. Pinge ristlõike erinevates punktides kahele paindemomendile mõjuva koormuse korral avaldub järgmiselt

$$\sigma(y, z) = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y},$$

kus inertsimomendid $I_y = \dfrac{bh^3}{12}$ ja $I_z = \dfrac{hb^3}{12}$. Arvuta pinge nulljoon (sirge, kus $\sigma = 0$) ja minimaalsed ning maksimaalsed pinged ristlõikes.



Lahendus. Leiame inertsimomendid

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 500\,\text{cm}^4, \quad I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \cdot 6^3}{12} = 180\,\text{cm}^4.$$

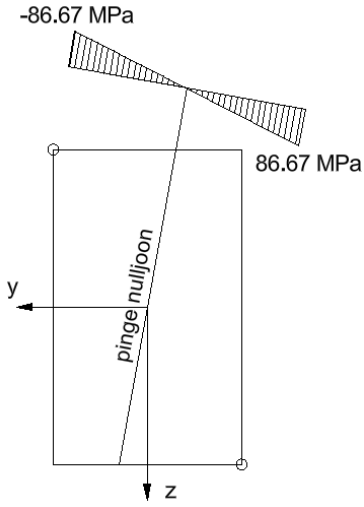
Pinge nulljoone leidmiseks peame leidma ristlõikes kaks punkti, mil $\sigma = 0$. Valime $y = 3$ cm

$$\sigma(3, z) = \frac{M_z \cdot 3}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} = -\frac{4 \cdot 3}{180} + \frac{2 \cdot z}{500} = 0 \to z = 16.67\,\text{cm}.$$

Sirge läbi nende kahe punkti jaotab pingetasandi negatiivseks ja positiivseks osaks. Joonest kõige kaugemates ristlõike punktides (-3, 5) ja (3, -5) tekivad ekstremaalsed pinged

$$\sigma(-3,\, 5) = \frac{(-4000) \cdot (-0.03)}{180 \cdot 10^{-8}} + \frac{2000 \cdot 0.05}{500 \cdot 10^{-8}} = 86.67 \cdot 10^6\,\text{Pa} = 86.67\,\text{MPa}.$$

$$\sigma(3,\, -5) = \frac{(-4000) \cdot 0.03}{180 \cdot 10^{-8}} + \frac{2000 \cdot (-0.05)}{500 \cdot 10^{-8}} = -86.67 \cdot 10^6\,\text{Pa} = -86.67\,\text{MPa}.$$



2.6.1. Jõusüsteemi taandamine ja selle tsentraaltelg

Kehale mõjuvat jõudude kogumit nimetatakse jõusüsteemiks (JS). Jõudude toimel võib keha liikuda kiirendusega, pöörelda nurkkiirendusega ja erijuhul püsida tasakaalus ja paigal. Jõud ja jõu pöörav mõju ehk moment on vektorsuurused. Formaalselt on jäiga keha mehaanikas jõud "libisev vektor", st jõudu võib lugeda rakendatuks oma mõjusirge mis tahes punkti. Momentvektor on vabavektor: seda võib lugeda rakendatuks keha mis tahes punkti.

Teisendusreegel: soovides mingisse punkti rakendatud jõudu teisendada paralleelselt oma mõjusirgega uude punkti tuleb arvestada jõu momendiga uue punkti suhtes.

Mainitud omaduste ja jõu teisendusreegli abil saab n'ist jõust koosneva JS'i taandada mingisse punkti O, nii tekib n momenti selle punkti suhtes ja sinna on rakendatud n jõudu. Ühte punkti rakendatud n jõudu võib kokku liita ja asendada summarse jõuvektoriga, mida nimetatakse JS'i **peavektoriks**:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

Samal moel võib punktis O mõjuvad n momenti kokku liita ja saadud summarset momenti nimetatakse **peamomendiks**:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi}(\mathbf{F}_i).$$

Jõusüsteemi invariandid.

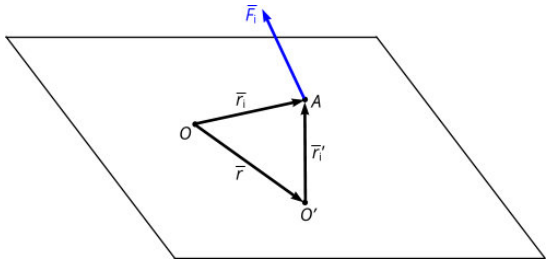
Taandades sedasi JS'i ruumi erinevatesse punktidesse tekib küsimus, kas leidub mingeid JS'i iseloomustavaid suuruseid, mis ei sõltu taandamispunkti valikust ehk mis on JS'i invariandid?

Ilmselt peavektor $\mathbf{R}$ on JS'i invariant, sest vektorite summa $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ ei ole seotud taandamispunkti valikuga.

Kuidas on lood peamomendiga? Vaatleme kahte taandamispunkti O ja O'.

Punktis O:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$



Punktis O':

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i =$$

$$= [\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}] = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r} \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}.$$

Seega $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{M}_{O'}$ ja järelikult peamoment ei ole invariantne, sest sõltub taandamispunkti valikust.

Leiame vektori $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}$ projektsiooni peavektori $\mathbf{R}$ suunal. Selleks arvutame skalaarkorrutise

$$\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R},$$

sest vektorid $\mathbf{r} \times \mathbf{R}$ ja $\mathbf{R}$ on ristuvad. Järelikult skalaarkorrutis $\mathbf{M}_{O'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$.

Arvutame peamomendi $\mathbf{M}_0$ projektsiooni M^* peavektori $\mathbf{R}$ suunale

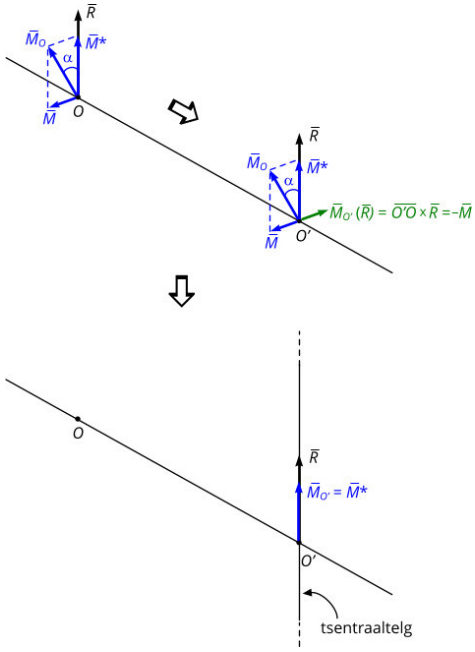
$$M^* = \mathrm{pr}_{\mathbf{R}} \mathbf{M}_O = \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{M}_{0'} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \mathrm{pr}_{\mathbf{R}} \mathbf{M}_{O'}.$$

Järelikult peamomendi $\mathbf{M}_0$ projektsiooni M^* peavektori $\mathbf{R}$ suunale on invariantne, sest see ei sõltu taandamispunkti valikust.

Seega JS'i invariandid on $\mathbf{R}$ ja M^*.

Jõukruvi ehk dünaam.

Olgu JS taandatud mingisse punkti O peavektoriga $\mathbf{R}$ ja peamomendiga $\mathbf{M}_O$. Üldjuhul $\mathbf{R} \nparallel \mathbf{M}_O$.



Peamomendi projektsioon peavektori suunal

$$M^* = \frac{\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = M_0 \cos\alpha.$$

Lahutame peamomendi kaheks ristkomponendiks:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}^* + \mathbf{M},$$

kus $\mathbf{M}^*$ on invariantne osa ja $\mathbf{M}$ on taandumispunktist sõltuv peavektoriga $\mathbf{R}$ ristuv osa.

Selgitame, kas leidub selline punkt O' nii, et

$$\mathbf{M} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}^* \text{ ja } \mathbf{M}_{O'} \| \mathbf{R}?$$

Otsitav punkt O' saab olla sirgel, mis läbib punkti O ja on risti vektoritega $\mathbf{M}_O$ ja $\mathbf{R}$ ristuva tasapinnaga.

Punkti O' asukoht sellel sirgel määratakse tingimusega, et peavektori $\mathbf{R}$ moment punkti O' suhtes on võrdvastupidine vektoriga $\mathbf{M}$.

Taandades peavektori $\mathbf{R}$ punktist O punkti O', tuleb juurde arvestada moment $\overrightarrow{OO'} \times \mathbf{R} = -\mathbf{M}$. Peamomendi vektorit $\mathbf{M}_O$ võime rakendada punktist O', sest moment on vabavektor. Summaarne moment punktis O' on

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{M} = \mathbf{M}^* + \mathbf{M} - \mathbf{M} = \mathbf{M}^*.$$

Nüüd oleme on JS taandanud punkti O' peavektoriga $\mathbf{R}$ ja peamomendiga $\mathbf{M}^*$ ning neil on ühine mõjusirge, mida nimetatakse **tsentraalteljeks**. Seejuures on $\mathbf{M}^*$ mooduli poolest vähim võimalik peamoment.

Tsentraaltelje võrrand.

Eelneva põhjal kirjutame $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}^* = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}$. Kuna vektorid $\mathbf{M}^*$ ja $\mathbf{R}$ samasihilised ehk kollineaarsed, siis leidub skalaar p nii, et

$$\mathbf{M}^* = p\,\mathbf{R}, \tag{2.33}$$

kus konstanti p nimetatakse **jõukruvi parameetriks**, mille mõõtühik on meeter. Kui $p > 0$, siis on vektorid $\mathbf{M}^*$ ja $\mathbf{R}$ samasuunalised; kui $p < 0$, on $\mathbf{M}^*$ ja $\mathbf{R}$ vastasuunalised. Seega

$$p\,\mathbf{R} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{R}. \tag{2.34}$$

Avaldame viimases avaldises olevad vektorid koordinaattelgede suunaliste ühikvektorite **i**, **j** ja **k** ehk baasivektorite lineaarse kombinatsioonina

$$\begin{cases} \mathbf{R} &= R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}, \\ \mathbf{M}_O &= M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k}, \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \end{cases}$$

Kirjutame tingimuse (2.34) välja koordinaatkujul

$$p(R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}) = (M_{Ox}\mathbf{i} + M_{Oy}\mathbf{j} + M_{Oz}\mathbf{k}) - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}.$$

Võrdsustame vasakul ja paremal pool olevad baasivektorite kordajad

$$\begin{cases} pR_x = M_{Ox} - (yR_z - zR_y), \\ pR_y = M_{Oy} + (xR_z - zR_x), \\ pR_z = M_{Oz} - (xR_y - yR_x), \end{cases}$$

Avaldame igast võrrandist parameetri p, siis saame võrdused

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} + (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z} = p, \qquad (2.35)$$

mis ongi tsentraaltelje võrrand. Kasutades seoses (2.33) vektorite pikkusi, saame jõukruvi parameetri p avaldada kujul

$$p = \frac{M^*}{R} = \frac{\mathbf{M_O} \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}. \qquad (2.36)$$

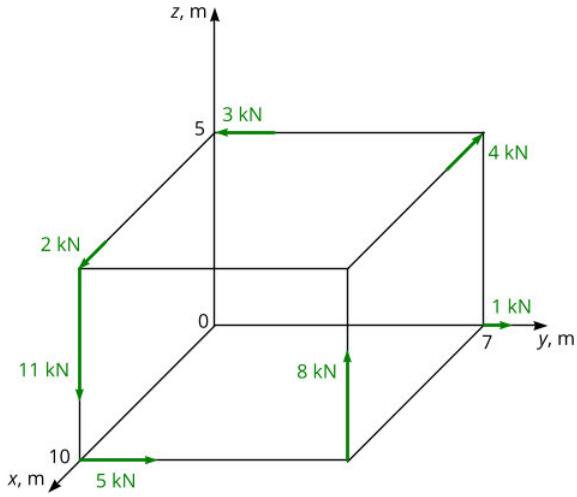
Ül 2.48. Taandada joonisel 2.19 kujutatud JS koordinaatide algus-punkti O, määrates peavektori $\mathbf{R}$ ja peamomendi $\mathbf{M}_O$.

Märkus. Mugavama kujutamise huvides on jõuvektor teoreetilises mehaanikas kujutatud oma rakenduspunktis kas „sabaga" rakendatult või noole otsaga.

Lahendus. Peavektori projektsioonid on kõigi JS'i teljesuunaliste projektsioonide summa:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \end{cases}$$

Peavektori suurus ehk moodul $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$.



Joonis 2.19: Jõusüsteem

Samuti pemomendi projektsioonid on JS jõudude momentide projektsioonide summad punkti O läbivate koordinaattelgede suhtes:

$$\begin{cases} M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{iOx}, \\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iOy}, \\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iOz}. \end{cases}$$

Peamomendi suurus ehk moodul $M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$.

Jõu momendi projektsiooni märgi määrab parema käe **kruvireegel**: kui jõu pöörav mõju ümber telje on suunas, kus parema käe kruvi liigub telje positiivses suunas, siis on projektsioon positiivne, vastassuunas pöörav suund on negatiivne projektsioon. Kui jõuvektor ja telg jäävad ühisesse tasapinna (neist saab mõttes ühise tasapinna läbi panna), siis sellise jõu moment telje suhtes on null.

Peavektor:

$$\begin{cases} R_x = 2 - 4 = -2\,\text{kN}, \\ R_y = 5 + 1 - 3 = 3\,\text{kN}, \\ R_z = 8 - 11 = -3\,\text{kN}. \end{cases}$$

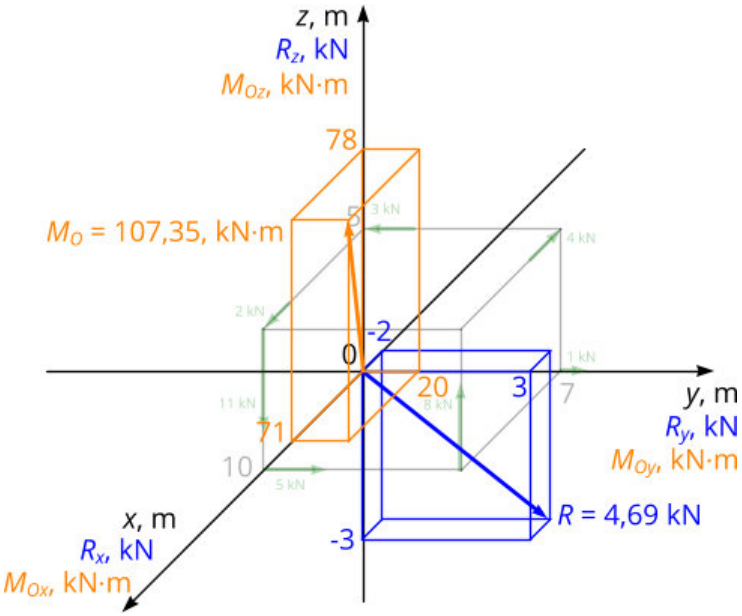
Peavektori moodul $R = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22} \approx 4.69\,\text{kN}$.

Peamoment:

$$\begin{cases} M_{Ox} = 8 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 71\,\text{kN} \cdot \text{m}, \\ M_{Oy} = -8 \cdot 10 - 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 11 \cdot 10 = 20\,\text{kN} \cdot \text{m}, \\ M_{Oz} = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 7 = 78\,\text{kN} \cdot \text{m}. \end{cases}$$

Peamomendi moodul $M_O = \sqrt{71^2 + 20^2 + 78^2} = 5\sqrt{461} \approx 107.35\,\text{kN}$.

Vektorid $\mathbf{R}$ ja $\mathbf{M}_O$ rakendatud koordinaatide alguspunktist O (vt joonis 2.20).



Joonis 2.20: Taandatud jõusüsteem

Vastus: Peavektor $\mathbf{R} = (-2,\ 3,\ -3)$ ja peamoment $\mathbf{M}_O = (71,\ 20,\ 78)$.

Ül 2.49. Määrata joonisel 2.19 kujutatud JS tsenraaltelje asukoht, millel JS taandub dünaamiks peavektoriga $\mathbf{R}$ ja peamomendiga $\mathbf{M}^*$.

Märkus. Mugavama kujutamise huvides on jõuvektor teoreetilises mehaanikas kujutatud oma rakenduspunktis kas „sabaga" rakendatult või noole otsaga.

Lahendus. Kasutame ülesandes 2.48 leitud jõusüsteemi peavektorit ja peamomenti

$$\mathbf{R} = (-2,\ 3,\ -3) \quad \text{ja} \quad \mathbf{M}_O = (71,\ 20,\ 78).$$

Tsentraaltelje võrrandi leidmiseks arvutame valemist (2.36) M^* ja tsentraaltelje parameetri p:

$$M^* = \frac{\mathbf{M_O} \cdot \mathbf{R}}{R} = \frac{71 \cdot (-2) + 20 \cdot 2 + 78 \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-3)^2}} = -158\sqrt{\frac{2}{11}} \approx -67.37\,\text{kN} \cdot \text{m}$$

$$p = \frac{M^*}{R} = -\frac{158}{11} \approx -14.36\,\text{m}$$

Nüüd saame välja kirjutada tsentraaltelje võrrandi (2.35):

$$\frac{71 - \big(y \cdot (-3) - z \cdot 3\big)}{-2} = \frac{20 + \big(z \cdot (-2) - x \cdot (-3)\big)}{3} = \frac{78 - \big(x \cdot 3 - y \cdot (-2)\big)}{-3} = -\frac{158}{11}.$$

Neist kolmest võrdusest saame lineaarse võrrandsüsteemini:

$$\begin{cases} 3y + 3z = -\frac{465}{11}\,\text{kN} \cdot \text{m} \\ -3x + 2z = -\frac{694}{11}\,\text{kN} \cdot \text{m} \\ 3x + 2y = \frac{384}{11}\,\text{kN} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Sellest võrrandisüsteemist saame leida tsentraaltelje lõikepunktid koordinaatasanditega, so punktid $A(x_A,\, x_B,\, 0)$, $B(x_B,\, 0,\, z_B)$ ja $C(0,\, y_C,\, z_C)$.

$$\begin{aligned} A: &\quad z = 0 \quad x_A = \tfrac{694}{33} \approx 21.03\,\text{m} \quad y_A = -\tfrac{155}{11} \approx -14.09\,\text{m} \\ B: &\quad y = 0 \quad x_B = \tfrac{128}{11} \approx 11.64\,\text{m} \quad z_B = -\tfrac{155}{11} \approx -14.09\,\text{m} \\ C: &\quad x = 0 \quad y_C = \tfrac{192}{11} \approx 17.45\,\text{m} \quad z_C = -\tfrac{347}{11} \approx -31.55\,\text{m} \end{aligned}$$

Järelikult tsentraaltelje punktid on

$$A\left(\frac{694}{33}, -\frac{155}{11}, 0\right), \quad B\left(\frac{128}{11}, 0, -\frac{155}{11}\right) \quad \text{ja} \quad C\left(0, \frac{192}{11}, -\frac{347}{11}\right).$$

Leitud kolm punkt asuvad tõepoolest ühel sirgel, sest vekorid $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ on kollineaarsed, sest

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \mathbf{0}.$$

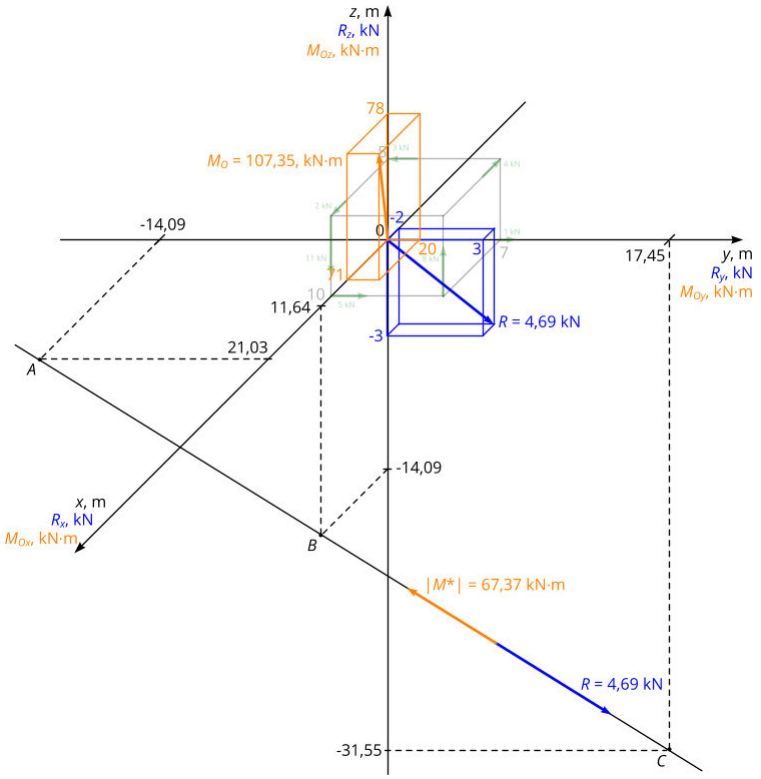
Tsentraaltelje sihivektoriks $\mathbf{s}$ võime valida vektoriga $\overrightarrow{AB}$ kollineaarse vektori, seega

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{310}{33}, \frac{155}{11}, -\frac{155}{11}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s} = (-62,\, 93,\, -93).$$

Nüüd saame kirjutada välja tsentraaltelje parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = -62t + \frac{694}{33}, \\ y = 93t - \frac{155}{11}, \\ z = -93t. \end{cases}$$

Arvutatud punktid ühes neid läbiva tsentraaltelje ja sellel jõukruviks taanduva jõusüsteemiga on kujutatud alltoodud joonisel.



Joonis 2.21: Tsentraaltelg ja jõukruviks taanduv jõusüsteem

2.7. Teist järku jooned ja pinnad

Ül 2.50. Kahe posti vahele on paigaldatud kõrgpingeliin. Postide vaheline kaugus $l = 50\,\text{m}$ ning ühe meetri kaabli mass on 10 kg.

Kahest otsast kinnitatud kaabel võtab üldjuhul aheljoone kuju, mida xz-teljestikus kirjeldab võrand

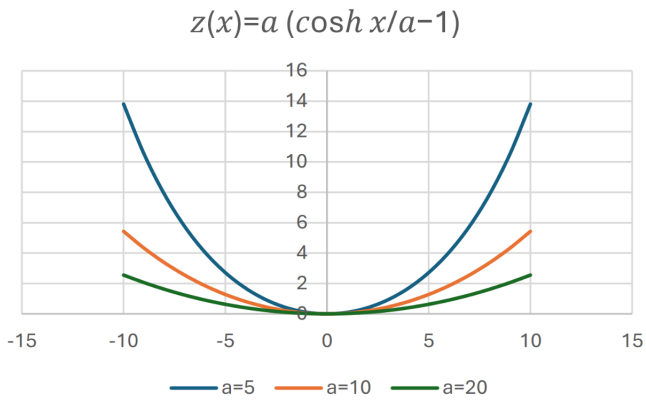
$$z(x) = a\Big(\cosh\frac{x}{a} - 1\Big),$$

kus kordaja a kirjeldab läbirippe suurust (vt joonis 2.22).
Kui läbiripe on väike ja kaablile mõjuvad ainult vertikaalkoormused (omakaal), siis rippuva kaabli tasakaalu kirjeldab lihtsustatud diferentsiaalvõrrand

$$H\frac{d^2z(x)}{dx^2} = -p(x), \tag{2.37}$$

kus H on kaabli tõmbejõu horisontaalprojektsioon, $z(x)$ on rippuva kaabli kuju ja p on kaablile mõjuv ühtlane koormus (ühikud N/m).

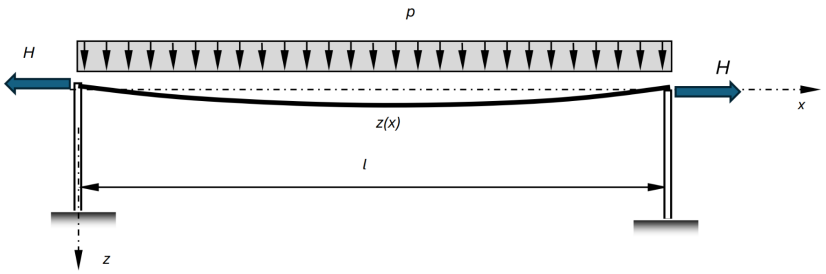
1) Leidke funktsioon $z(x)$, mis kirjeldab paindunud kaabli kuju.
2) Kui suurt horisontaaljõudu H tuleb rakendada, et kaablit hoida asendis, kus maksimaalne vajutus keset ava on $z(25) = 0,5\,\text{m}$?



Joonis 2.22: Aheljooned

Lahendus. Kaablile mõjub ühtlane koormus (omakaal), kusjuures igale kaabli meetrile mõjub koormus

$$p(x) = p = 10 \cdot 9,81\,\mathrm{N/m}.$$



Kaabli kuju leidmiseks integreerime diferentsiaalvõrrandit (2.37) kaks korda:

$$H\frac{dz(x)}{dx} = -p\,x + C_1 \qquad \text{ja} \qquad Hz(x) = -\frac{p}{2}x^2 + C_1 x + C_2.$$

Arvestades, et $z(0) = 0$, leiame, et $C_2 = 0$. Kuna $z(l) = 0$, siis

$$-\frac{p}{2}l^2 + C_1 l = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{p\,l}{2}.$$

Seega kaabli kuju kirjeldab võrrand

$$z(x) = \frac{p\,x}{2H}\big(l - x\big),$$

mis on ruutparabool.

Leiame kaabli hoidmiseks vajaliku horisontaaljõu H:

$$H = \frac{p\,x}{2z(x)}\big(l - x\big) = \frac{98,1 \cdot 25}{2 \cdot 0,5}\big(50 - 25\big) = 61312,5\,\mathrm{N} = 61,31\,\mathrm{kN}.$$

Vastus: Kaabli kuju kirjeldab ruutparabool $z(x) = \dfrac{p\,x}{2H}\big(l - x\big)$.
Ava keskel vajutuse $0,5$ m hoidmiseks tuleb rakendada horisontaaljõudu $H = 61,31$ kN.

Ül 2.51. Kahe posti vahele on paigaldatud kõrgpingeliin. Postide vaheline kaugus $l = 200\,\text{m}$ ning ühe meetri kaabli mass on 10 kg. Teine post on paigaldatud 10 m madalamale kui esimene.

1) Leidke funktsioon $z(x)$, mis kirjeldab paindunud kaabli kuju.
2) Leidke posti maksimaalne läbiripe, kui tõmbejõu horisontaalprojektsioon on $H = 50\,\text{kN}$.

Kahest otsast kinnitatud kaabel võtab üldjuhul aheljoone kuju, mida xz-teljestikus kirjeldab võrand

$$z(x) = a\Big(\cosh\frac{x}{a} - 1\Big),$$

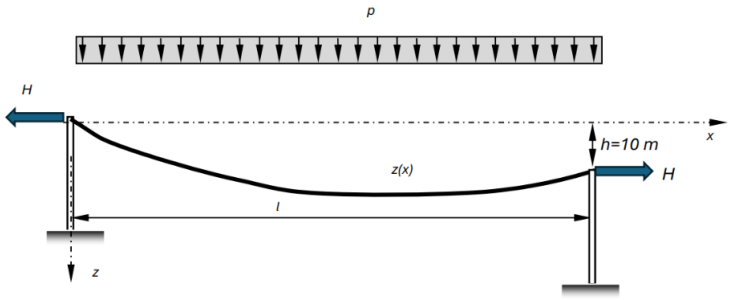
kus kordaja a kirjeldab läbirippe suurust (vt joonis 2.22).
Kui läbiripe on väike ja kaablile mõjuvad ainult vertikaalkoormused (omakaal), siis rippuva kaabli tasakaalu kirjeldab lihtsustatud diferentsiaalvõrrand

$$H\frac{d^2z(x)}{dx^2} = -p(x), \tag{2.38}$$

kus H on kaabli tõmbejõu horisontaalprojektsioon, $z(x)$ on rippuva kaabli kuju ja p on kaablile mõjuv ühtlane koormus (ühikud N/m).

Lahendus. Kaablile mõjub ühtlane koormus (omakaal), kusjuures igale kaabli meetrile mõjub koormus

$$p(x) = p = 10 \cdot 9,81\,\text{N/m}.$$



Kaabli kuju leidmiseks integreerime diferentsiaalvõrrandit (2.38) kaks korda:

$$H\frac{dz(x)}{dx} = -p\,x + C_1 \qquad \text{ja} \qquad Hz(x) = -\frac{p}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Arvestades, et $z(0) = 0$, leiame, et $C_2 = 0$. Avaldame integreeimiskonstandi

$$C_1 = \frac{Hz(x) + \frac{px^2}{2}}{x},$$

millest ülesande tingimuse $z(200) = 10$ korral leiame, et

$$C_1 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 10 + \frac{98{,}1 \cdot 200^2}{2}}{200} = 12310.$$

Seega kaabli kuju kirjeldab võrrand

$$z(x) = -\frac{p}{2H}x^2 + \frac{C_1}{H}x = -0{,}00098x^2 + 0{,}2462x$$

mis on ruutparabool.

Leiame kaabli suurima läbirippe koha

$$\frac{dz}{dx} = -0{,}00196x + 0{,}2462 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 125{,}5\,\text{m}.$$

Maksimaalne läbiripe on

$$z(125{,}5) = 15{,}45\,\text{m}.$$

Vastus: Horisontaalse tõmbejõu 50 kN korral on maksimaalne läbiripe 15, 45 m.

Ül 2.52. Hüperboolne paraboloid ehk sadulpind on antud võrrandiga

$$x^2 - y^2 = c^2(z - z_0). \tag{2.39}$$

1. Koostada pinna sadulpunkti $X_0(0,\ 0,\ z_0)$ läbivate sirgjooneliste moodustajate parameetrilised võrrandid.
2. Koostada selle sadulpinna parameetrilised võrrandid, kui pinna parameetrijoonteks on selle sirgjoonelised moodustajad.

Lahendus. **1.** Pinna sirgjooneliste moodustajate leidmiseks lahutame pinna võrrandi lineaartegurite korrutiseks

$$(x + y)(x - y) = c^2(z - z_0).$$

Selle võrduse vasaku ja ja parema poole saame esitada lineaartegurite korrutiste süsteemina kahel esineval viisil

$$\text{I: } \begin{cases} \lambda(x + y) = \mu\, c\,(z - z_0), \\ \mu(x - y) = \lambda\, c. \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad \text{II: } \begin{cases} \lambda(x + y) = \mu\, c, \\ \mu(x - y) = \lambda\, c\ (z - z_0). \end{cases} \tag{2.40}$$

Nendes võrrandisüsteemides olevad võrrandid esitavad tasandeid ning nende lõikejooneks on pinnal asuv sirge, so pinna sirgjooneline moodustaja. Seega sadulpinnal on kaks sirgjooneliste moodustajate parve (2.40), kus λ ja μ on parve parameetrid, mis ei ole korraga nullid.

Moodustajate parve (2.40) kuuluvate tasandite normaalvektorid on

$$\text{I: } \Rightarrow \quad \begin{matrix}\mathbf{n}_1 = (\lambda,\ \lambda,\ -c\,\mu)\\ \mathbf{n}_2 = (\mu,\ -\mu,\ 0)\end{matrix} \qquad \text{ja} \qquad \text{II: } \Rightarrow \quad \begin{matrix}\mathbf{m}_1 = (\lambda,\ \lambda,\ 0)\\ \mathbf{m}_2 = (\mu,\ -\mu, -c\,\lambda)\end{matrix}$$

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} \lambda & -c\,\mu \\ -\mu & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \lambda & -c\,\mu \\ \mu & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix} \right) = \big(-c\mu^2,\ -c\mu^2,\ -2\lambda\,\mu \big)$$

$$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \left(\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -\mu & -c\,\lambda \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & -c\,\lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix} \right) = \big(-c\,\lambda^2,\ c\,\lambda^2,\ -2\lambda\,\mu \big)$$

Esimese parve sihivektoriks $\mathbf{s}_1$ võime võtta vektoriga $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ kollineraase vektori

$$\mathbf{s}_1 = \big(c\,\mu,\ c\,\mu,\ 2\lambda\big), \tag{2.41}$$

sest $\mu \neq 0$.
Teise parve sihivektoriks $\mathbf{s}_2$ võime võtta vektoriga $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ kollineraase vektori

$$\mathbf{s}_2 = \big(c\,\lambda,\ -c\,\lambda,\ 2\mu\big), \tag{2.42}$$

sest $\lambda \neq 0$. Parve parameetrite λ ja μ väärtuste leidmiseks kasutame asjaolu, et punkt $X_0(0,\ 0,\ z_0)$ peab olema parve kuuluval moodustajal. Parve võrranditest (2.40) leiame

$$\text{I: } \begin{cases} 0 = 0, \\ 0 = \lambda\,c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \qquad \text{ja} \qquad \text{II: } \begin{cases} 0 = \mu\,c, \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mu = 0$$

Leiame punkti $X_0(0,\ 0,\ z_0)$ läbivate sirgjooneliste moodustajate sihivektorid. Esimese parve moodustaja sihivektoriks (2.41) võime võtta

$$\vec{s}_1 = (c,\ c,\ 0) \quad \text{või sellega kollineaarse vektori} \quad \vec{s}_1 = (1,\ 1,\ 0),$$

kus $\mu = 1 \neq 0$. Teise parve moodustaja sihivektoriks (2.42) võime võtta

$$\vec{s}_2 = (c,\ -c,\ 0) \quad \text{või sellega kollineaarse vektori} \quad \vec{s}_2 = (1,\ -1,\ 0),$$

kus $\lambda = 1 \neq 0$. Järelikult punkti $X_0(0,\ 0,\ z_0)$ läbivate sirgjooneliste moodustajate parameetrilised võrrandid on

$$\begin{cases} x = \ \ t, \\ y = \ \ t, \\ z = z_0, \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad \begin{cases} x = \ \ t, \\ y = -t, \\ z = z_0. \end{cases} \tag{2.43}$$

2. Tuletame nüüd sadulpinna (2.39) parameetrilised võrrandid, kasutades selleks pinna sirgjoonelisi moodustajaid. Fikseerime pinna ühe moodustaja ja teise moodustaja

leiame nii, et see libiseb mööda esimest moodustajat ja kujundab sadulpinna. Valime võrranditest (2.43) esimese ja kasutame selle sihivektoriga kollineraarset vektorit

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{2}u, \\ y = \dfrac{c}{2}u, \\ z = z_0, \end{cases} \tag{2.44}$$

kus $t = u$, so moodustaja parameeter otsitava võrrandi esimeseks parameetriks. Fikseeritud moodustaja punktid peavad asuma teisel moodustajal, so sirgel

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{2}u + s_1 v, \\ y = \dfrac{c}{2}u + s_2 v, \\ z = z_0 + s_3 v, \end{cases} \tag{2.45}$$

mille sihivektor on $\mathbf{s} = (s_1,\, s_2,\, s_3)$. Asendame sadulpinna (2.39) võrranditesse otsitava moodustaja (2.45) võrrandid

$$\left(\frac{c}{2}u + s_1 v\right)^2 - \left(\frac{c}{2}u + s_2 v\right)^2 = c^2\big(z_0 + s_3 v - z_0\big),$$

millest pärast sulgude avamist ja lihtsustamist saame ruutvõrrandi

$$(s_1^2 - s_2^2)v^2 + \big(c\,u(s_1 - s_2) - c^2\, s_3\big)v = 0.$$

Kuna sirgjoonelise moodustaja kõik punktid on samaaegset pinna punktid, siis viimane võrrand peab olema samasus parameetri v iga väärtuse korral, seega

$$\begin{cases} s_1^2 - s_2^2 = 0, \\ c\,u(s_1 - s_2) - c^2\, s_3 = 0. \end{cases}$$

Võrdusest $s_1^2 - s_2^2 = 0$ saame kaks tingimust:

$$\begin{aligned} &1) \quad s_1 = \ \ s_2 \quad \Rightarrow \quad -c^2 s_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s} = (s_1,\, s_1,\, 0) \\ &2) \quad s_1 = -s_2 \quad \Rightarrow \quad 2u\, s_1 = c\, s_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s} = \left(s_1, -s_1,\, \frac{2\,u}{c}s_1\right) \end{aligned}$$

Esimesel juhtumil saame fikseeritud moodustajaga (2.44) kokkulangeva sirge, sest nende sihivektorid on kollineaarsed, so

$$\left(\frac{c}{2},\, \frac{c}{2},\, 0\right) \,||\, \big(s_1,\, s_1,\, 0\big).$$

Teisel juhtumil leiame vektoriga $\mathbf{s}$ kollineaarese vektori

$$\mathbf{s}_2 = \frac{c}{2\,s_1}\mathbf{s} = \frac{c}{2\,s_1}\left(s_1, -s_1,\, \frac{2\,u}{c}s_1\right) = \left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2},\, u\right).$$

Asendame sihivektori $\mathbf{s}_2$ võrranditesse (2.45), saame

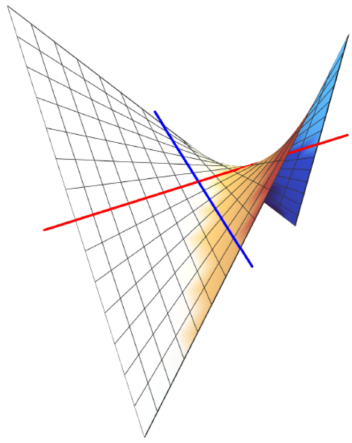
$$\begin{cases} x = \frac{c}{2}u + \frac{c}{2}v, \\ y = \frac{c}{2}u - \frac{c}{2}v, \\ z = z_0 + u\,v, \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x = \frac{c}{2}\big(u+v\big), \\ y = \frac{c}{2}\big(u-v\big), \\ z = z_0 + u\,v. \end{cases} \tag{2.46}$$

Võrrandid (2.46) ongi sadulpinna (2.39) parameetrililsed võrrandid kui parameetrijoonteks on valitud selle pinna sirgjoonelised moodustajad.

Fikseerides võrrandites (2.46) ühe parameetri, näiteks $v = const$, saame $u-$joone, milleks on sirgjooneliste moodustajate esimesse parve kuuluv moodustaja. Näiteks $v = 0$ korral saame moodustaja (2.44).

Fikseerides võrrandites (2.46) parameetri $u = const$, saame $v-$joone, milleks on sirgjooneliste moodustajate teise parve kuuluv moodustaja.

Joonisel (2.23) on kujutatud sadulpind, kui selle parameetrijoonte võrgu mooduatavad pinna sirgjoonelised moodustajad. Sinine ja punane moodustaja lõikuvad pinna sadulpunktis.



Joonis 2.23: Sadulpind sirgjooneliste moodustajatega

Vastus: 1) Sadulpinna sirgjooneliste moodustajate parameetrilised võrrandid on

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = z_0, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = -t, \\ z = z_0. \end{cases}$$

2) Sadulpinna parameetrilised võrrandid on

$$\begin{cases} x = \frac{c}{2}(u+v), \\ y = \frac{c}{2}(u-v), \\ z = z_0 + u\,v. \end{cases}$$

Ül 2.53. Projekteeritakse hüperboolse paraboloidi kujulist sadulkatust, mille võrrand on

$$x^2 - y^2 = c^2(z - z_0).$$

kus x ja y on horisontaalkoordinaadid ja z on vertikaalkoordinaat. Katuse projektsioon maapinnale on ring

$$x^2 + y^2 \le r^2.$$

Teatavasti on hüperboolne paraboloid joonpind, mille kujundab mööda juhtjoont liikuv sirge (moodustaja). Antud juhul pannakse katuse sõrestik kokku varrastest, mis kulgevad mööda moodustajaid. Vaadeldava pinna moodustaja juhtjoone parameetrilised võrrandid on

$$x = \frac{c}{2}u, \;\; y = \frac{c}{2}u, \;\; z = z_0 \quad u \in \mathbb{R}$$

ja fikseeritud u korral on moodustaja parameetrilised võrrandid järgmised:

$$x = \frac{c}{2}(u+v), \;\; y = \frac{c}{2}(u-v), \;\; z = u\,v + z_0 \quad v \in \mathbb{R}.$$

Olgu katuse vähim ja suurim kõrgus on vastavalt h ja H.

1. Avaldada katuse võrrandis olevad parameetrid c ja z_0 suuruste h ja H kaudu.
2. Leida juhtjoone parameetri u muutumispiirkond.
3. Avaldada parameetri u väärtusele vastava moodustaja (so varda) pikkus.

Lahendus. **1.** Katuse võrrandist avaldame

$$z = z_0 + \frac{1}{c^2}\big(x^2 - y^2\big).$$

Selle funktsiooni vähim ja suurim väärtus ringis $x^2 + y^2 \le r^2$ on vastavalt $z_0 + \frac{1}{c^2}\big(-r^2\big)$ ja $z_0 + \frac{1}{c^2}\,r^2$. Saame järgmise võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} z_0 - \dfrac{1}{c^2}r^2 = h, \\ z_0 + \dfrac{1}{c^2}r^2 = H. \end{cases}$$

Selle süsteemi võrrandeid liites ja lahutades leiame

$$z_0 = \frac{h+H}{2} \qquad \text{ja} \qquad c = r\sqrt{\frac{2}{H-r}}.$$

2. Juhtjoone projektsioon maapinnale on antud võrranditega

$$x = \frac{c}{2}u,\ \ y = \frac{c}{2}u,\ \ z = 0.$$

Seega ringis $x^2 + y^2 \le r^2$ paikneva osa korral

$$\frac{c^2}{4}u^2 + \frac{c^2}{4}u^2 \le r^2 \qquad \Rightarrow \qquad u^2 \le \frac{2\,r^2}{c^2}.$$

Parameetri u muutumispiirkond on

$$u \in \Big[-\frac{\sqrt{2}\,r}{c},\ \frac{\sqrt{2}\,r}{c}\Big]$$

ehk suuruste h ja H kaudu

$$u \in \big[-\sqrt{H-h},\, -\sqrt{H-h}\,\big].$$

3. Vaatleme konkreetsele u väärtusele vastavat moodustajat. Selle projektsioon maapinnale on ringis $x^2 + y^2 \le r^2$ asuv sirglõik, mille parameetrilised võrrandid on

$$x = \frac{c}{2}(u+v),\ \ y = \frac{c}{2}(u-v).$$

Lõigu otspunktid paiknevad ringjoonel $x^2 + y^2 = r^2$. Seega otspunktidele vastava parameetri v väärtuste saamiseks tuleb lahendada võrrand

$$\Big(\frac{c}{2}(u+v)\Big)^2 + \Big(\frac{c}{2}(u-v)\Big)^2 = r^2,$$

millest

$$v_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2r^2}{c^2-u^2}}.$$

Fikseeritud u väärtusele vastava moodustaja otspunktide koordinaadid on järgmised:

$$x = \frac{c}{2}(u + v_{1,2}), \quad y = \frac{c}{2}(u - v_{1,2}), \quad z = u\,v_{1,2} + z_0.$$

Moodustaja pikkus on

$$l_u = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{2} + u^2\right)(v_1 - v_2)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{c^2}{2} + u^2\right)\left(\frac{2r^2}{c^2} - u^2\right)}$$

ehk suuruste h ja H kaudu

$$l_u = 2\sqrt{\left(\frac{r^2}{H-h} + u^2\right)\left(H - h - u^2\right)}.$$

Vastus: **1.** Pinna võrrandi parameetrid $z_0 = \frac{h+H}{3}$, $c = r\sqrt{\frac{2}{H-r}}$.
2. Parameetri u muutumispiirkond $u \in \left[-\sqrt{H-h}, -\sqrt{H-h}\right]$.
3. Parameetri u väärtusele vastava varda pikkus $l_u = 2\sqrt{\left(\frac{r^2}{H-h} + u^2\right)\left(H - h - u^2\right)}$.

Ül 2.54. Tuleb projekteerida ühekattelise pöördhüperboloidi kujuline elektrijaama jahutustorn ehk gradiir. Jahutustorni kitsama osa läbimõõt peab olema 8 m ja selle kõrgus vundamendist 10 m, torni kogukõrgus on 16 m. Torni armatuuriks on hüperboloidi sirgjoonelised moodustajad. Leida armatuurvarda pikkus ja torni vundamendi läbimõõt.

Lahendus. Ühekattelise pöördhüperboloidi, mille kaelringjoon[5] ehk kitsaim koht on $xy-$tasandist kõrgusel h, kanooniline võrrand on

$$x^2 + y^2 - (z - h)^2 = r^2, \tag{2.47}$$

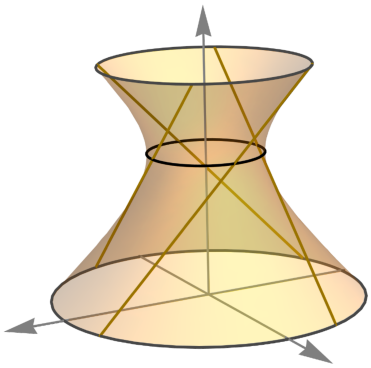
kus r on kaelringjoone raadius.
Kirjutame kaelringoone võrrandi (2.47) ümber kujul

$$x^2 - (z - h)^2 = r^2 - y^2.$$

Lahutame selle lineaartegurite korrutisteks

$$(x + z - h)(z - z + h) = (r + y)(r - y),$$

[5] vähima pindalaga ringjoon, mis tekib ühekattelise hüperboloidi lõikamisel tema teljega ristuva tasandiga.



Joonis 2.24: Ühekatteline hüperboloid sirgjooneliste moodustajatega

millest saame kaks parve sirgjoonelisi moodustajaid

$$\text{I}: \begin{cases} \lambda(x+z-h) = \mu(r+y), \\ \mu(x-z+h) = \lambda(r-y) \end{cases} \quad \text{ja} \quad \text{II}: \begin{cases} \lambda(x+z-h) = \mu(r-y), \\ \mu(x-z+h) = \lambda(r+y), \end{cases}$$

kus λ ja μ on parve parameetrid ning $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Siin sirgjoonelised moodustajad on esitatud kahe tasandi lõikejoonene. Esimesse parve kuuluvate tasandite normaalvektorid on

$$\mathbf{n}_1 = (\lambda,\, -\mu,\, \lambda) \quad \text{ja} \quad \mathbf{n}_2 = (\mu,\, \lambda,\, -\mu),$$

millest

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & -\mu \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} \right).$$

Seega, esimesse parve kuuluvate sirgjooneliste moodustajate sihivektoriteks võime valida vektorid

$$\mathbf{s}_1 = \left(\mu^2 - \lambda^2,\, 2\lambda\mu,\, \lambda^2 + \mu^2\right). \tag{2.48}$$

Hüperboolse paraboloidi kõik sirgjoonelised moodustajad lõikavad kaelringjoont. Kaelringjoonel olevate punktide koordinaadid on

$$X_0(r\cos u, r\sin u,\, h) \qquad u \in [0, 2\pi).$$

Punkti X_0 läbiva moodustaja sihivektori $\mathbf{s}_1$ leidmiseks tuleb määrata parve parameetrid λ ja μ. Selleks asendame punkti X_0 koordinaadid esimese parve võrrandisse

$$\begin{cases} \lambda(r\cos u + h - h) = \mu(r + r\sin u), \\ \mu(r\cos u + h - h) = \mu(r - r\sin u) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda\cos u = \mu(1+\sin u), \\ \mu\cos u = \mu(1-\sin u). \end{cases}$$

Järelikult parve parameetrid λ ja μ võime valida järgmiselt

$$\lambda = 1 + \sin u \quad \text{ja} \qquad \mu = \cos u.$$

Asendame leitud parameetrid sihivektori (2.48) koordinaatidesse

$$\mathbf{s}_1 = \big(\cos^2 u - (1+\sin u)^2,\ 2\cos u \cdot (1+\sin u),\ (1+\sin u)^2 + \cos^2 u\big),$$

millest pärast lihtsustamist saame

$$\mathbf{s}_1 = \big(-\sin u, \cos u, 1\big).$$

Nüüd saame välja kirjutada punkti X_0 läbiva sirjoonelise moodustaja parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = r\cos u - t\ \sin u, \\ y = r\sin u + t\ \cos u, \\ z = h + t. \end{cases}$$

Teisendame neid parameetrilisi võrrandid nii, et moodustaja fikseeritud punktis valime moodustaja lõikepunkti $xy-$tasandiga ja sihivektoriks vektori $\mathbf{s}_1$ ühikvektori. Kuna $xy-$tasandil $z = 0$ $(t = -h)$ ja $|\mathbf{s}_1| = \sqrt{2}$, siis

$$\begin{cases} x = r\cos u + h\sin u - t\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u, \\ y = r\sin u - h\cos u + t\frac{\sqrt{2}}{2}\cos u, \\ z = \qquad\qquad\qquad\quad t\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \tag{2.49}$$

Olgu projekteeritava torni kõrgus H, siis $z = H$ ja viimasest võrrandist saame

$$H = t\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{2}H.$$

Sirge (2.49) võrrandites on kasutatud ühikvektorit, siis parameetri t väärtus on võrdne sellele lõigu ehk moodustaja pikkusega.

Valitud koordinaatide süsteemi korral on torni vundament $xy-$tasandil, seega $z = 0$ ja võrrandist (2.47) järeldub vahetult

$$x^2 + y^2 = r^2 + h^2,$$

millest põhjaks oleva ringjoone raadius $R = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Vastavalt ülesande tingimustele $r = 4$, $h = 10\,\text{m}$ ja $H = 16\,\text{m}$ seega armatuurvarda pikkus $l = t = 16\sqrt{2}\,\text{m}$ ja vundamendi läbimõõt $d = 2R = 2\sqrt{4^2 + 10^2} = 2\sqrt{116}\,\text{m}$.

Kuna ühekatteline pöördparaboloid on oma telje suhtes sümmeetriline pind, siis sõltumata sirgjoonelisete moodustajete parvest, on armatuurvardad ühepikkused.

Vastus: Projekteeritava gradiiri armatuurvada pikkus $l = 16\sqrt{2}\,\text{m}$ ja vundamendi läbimõõt $d = 2\sqrt{116}\,\text{m}$.

Ül 2.55. Ehitusele on kavandatud elliptilise paraboloidi

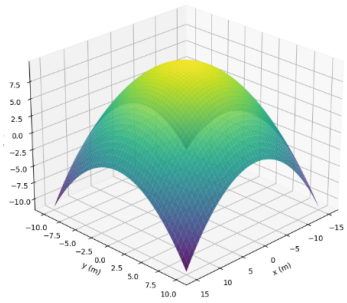
$$z(x,y) = 10 - \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10}$$

kujuline betoonkuppel, mille maksimaalne kõrgus asub koordinaatide alguspunktis. Leidke, millise kujuga on kupli horisontaalsed lõiked tasanditega $z = 5$ ja $z = 0$. Arvutage kupli maksimaalne põhja läbimõõt tasandil $z = 0$.

Lahendus. Pinna võrrand ilmutatud kujul on

$$z = c - ax^2 - by^2,$$

kus $a = \frac{1}{20}$, $b = \frac{1}{10}$ ja $c = 10$. See on elliptiline paraboloid, mille haripunkti koordinaadid on $H(0,\, 0,\, c)$ ja lõikejooned tasanditega $z = const$ on ellipsid.



Joonis 2.25: Betoonkupli pind.

Leiame horisontaalsed lõiked. Lõikes $z = 5$

$$5 = 10 - \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{10} \to \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{50} = 1.$$

Lõikes $z = 0$

$$\frac{x^2}{200} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

Leitud jooned on ellipsid. Põhja maksimaalne läbimõõt kõrgusel $z = 0$ on ellipsi suurem telg

$$2a = 2\sqrt{200} = 28.3.$$

2.8. Omaväärtused, omavektorid

Ül 2.56. Ühe linna kohta on teada, et igal aastal kolib

- 5% kesklinna elanikest äärelinnadesse ja
- 7% äärelinnade elanikest kesklinna.

Mitmendal aastal ületab kesklinna elanike arv äärelinnade elanike arvu, kui alguses elab kesklinnas 55000 elanikku ja äärelinnades kokku 65000? Millised oleksid elanike arvud piirjuhul selle mudeli korral?

Lahendus. Moodustame ülesandes antud protsentide põhjal nn *üleminekumaatriksi*

$$A = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,07 \\ 0,05 & 0,93 \end{bmatrix}.$$

On ilmne, et peale esimest aastat on elanike arv vastavalt

$$\begin{bmatrix} \text{kesklinnas} \\ \text{äärelinnas} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 55\,000 \\ 65\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56\,800 \\ 63\,200 \end{bmatrix},$$

peale teist aastat

$$\begin{bmatrix} \text{kesklinnas} \\ \text{äärelinnas} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} 55\,000 \\ 65\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56\,800 \\ 63\,200 \end{bmatrix}$$

ja pärast k-ndat ($k \geqslant 0$) aastat

$$\begin{bmatrix} \text{kesklinnas} \\ \text{äärelinnas} \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} 55\,000 \\ 65\,000 \end{bmatrix}.$$

Maatriksi A astendamiseks leiame selle omaväärtused ja omavektorid. Moodustame karakterisliku võrrandi

$$\begin{vmatrix} 0,95-\lambda & 0,07 \\ 0,05 & 0,93-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 1,88\lambda + 0,88 = 0,$$

mille lahenditeks on omaväärtused

$$\lambda_1 = 0.88, \quad \lambda_2 = 1.0 \qquad \text{ehk} \qquad \lambda_1 = \frac{22}{25}, \quad \lambda_2 = 1.$$

Nendele omaväärtustele vastavad omavektorid[6] on

$$\lambda_1: \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \lambda_2: \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[6] Maatriksi erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on lineaarselt sõltumatud.

Teisisõnu, need vektorid moodustavad baasi vektorruumis $\mathbb{R}^2$ ja elanike arve kirjeldava vektori saame avaldada omavektorite lineaarse kombinatsioonina

$$\begin{bmatrix} 55\,000 \\ 65\,000 \end{bmatrix} = 15\,000\,\mathbf{u} + 50\,000\,\mathbf{v}.$$

Kuna maatriks A on diagonaliseeritav, siis

$$A^k = PD^kP^{-1}, \quad \text{kus} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

on diagonaalmaatriks ning maatriksi P veergudeks on omavekorid $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$. Omavektorite lineaarse kombinatsiooni korral saame

$$A^k(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha A^k\mathbf{u} + \beta A^k\mathbf{v} = \alpha\lambda_1^k\mathbf{u} + \beta\lambda_2^k\mathbf{v}.$$

Seetõttu

$$A^k \begin{bmatrix} 55\,000 \\ 65\,000 \end{bmatrix} = 15\,000\,A^k\mathbf{u} + 50\,000\,A^k\mathbf{v} = 15\,000\left(\frac{22}{25}\right)^k\mathbf{u} + 50\,000\,\mathbf{v} =$$

$$= \begin{bmatrix} -15\,000\left(\frac{22}{25}\right)^k + 70\,000 \\ 15\,000\left(\frac{22}{25}\right)^k + 50\,000 \end{bmatrix}.$$

Vastus: Piirjuhul elab kesklinnas 70 000 ja äärelinnades 50 000 elanikku.

Ül 2.57. Vaatame diskreetset dünaamilist süsteemi, mis on antud võrranditega

$$x_{n+1} = 1{,}2x_n - 0{,}4y_n$$
$$y_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}8y_n$$

kus x_n ja y_n vastavate suuruste väärtusi ajahetkel n. Leidke x_n ja y_n algtingimusel $(x_0, y_0) = (100, 10)$.

Lahendus. Tähistame

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

nn. *ülemineku maatriksit*. Siis

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Maatriksi A omaväärtused on $\lambda_1 = 1 + i\frac{2}{5}$ ja $\lambda_2 = 1 - i\frac{2}{5}$. Seega leidub sellel maatriksil kaks lineaarselt sõltumatut omavektorit[7] omavektorit

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + i\frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} - i\frac{4}{5} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kuna omavektorite elemendid on kompleksarvud, siis vaatame vektorruumi $\mathbb{C}^2$. Omavektorid moodustavad baasi vektorruumis $\mathbb{C}^2$ ja

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix} = (5 - i60)\mathbf{u} + (5 + i60)\mathbf{v}.$$

Seetõttu

$$A^n \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix} = (5 - i60)A^n\mathbf{u} + (5 + i60)A^n\mathbf{v} = (5 - i60)\left(1 + i\frac{2}{5}\right)^n \mathbf{u} + (5 + i60)\left(1 - i\frac{2}{5}\right)^n \mathbf{v} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2\operatorname{Re}\left((50 - i20)(1 + i\frac{2}{5})^n\right) \\ 2\operatorname{Re}\left((5 - i60)(1 + i\frac{2}{5})^n\right) \end{bmatrix}.$$

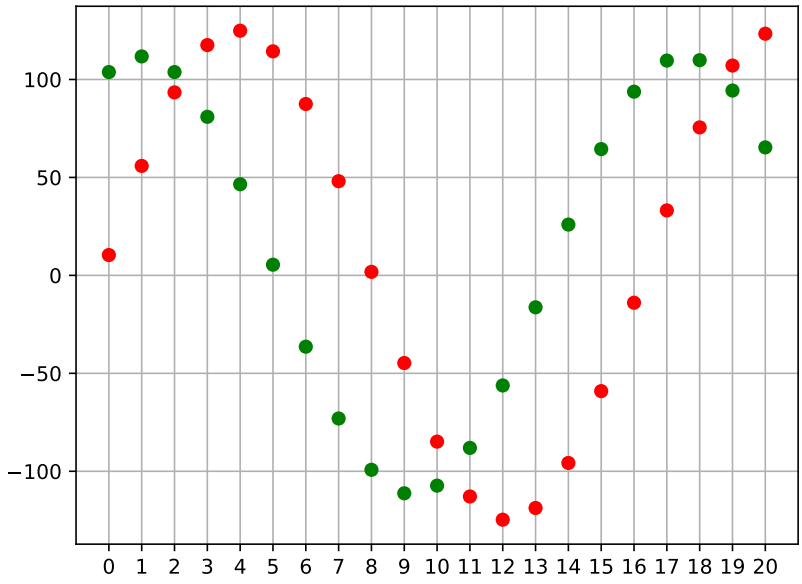
Märgime

$$50 - i20 = 10\sqrt{29}e^{i\varphi}, \quad \varphi = -\arctan\frac{2}{5},$$
$$5 - i60 = 5\sqrt{145}e^{i\psi}, \quad \psi = -\arctan 12,$$
$$1 + i\frac{2}{5} = \frac{\sqrt{29}}{5}e^{i\theta}, \quad \theta = \arctan\frac{2}{5} = -\varphi.$$

[7] Maatriksi erinevatele omaväärtustule vastavad omavektorid on lineaarselt sõltumatud.

Teisendades x_n ja y_n avaldised kompleksarvude eksponentkujule ning kasutades seost eksponentkuju ja trigonomeetrilise kuju vahel, saame

$$x_n = 20\sqrt{29}\left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^n \cos((n-1)\arctan\frac{2}{5}),$$
$$y_n = 10\sqrt{145}\left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^n \cos(n\arctan\frac{2}{5} - \arctan 12).$$



Joonis 2.26: Suuruste x_n ja y_n väärtused.

Ül 2.58. Tasandilist membraani venitatakse nii, et sellel paiknev materiaalne punkt $X(x_1, x_2)$ nihkub asukohta $Y(y_1, y_2)$ järgmise reegli põhjal:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

Leida venituse peateljed, st sirged, millel asuvad punktid jäävad venitamisel samale sirgele.

Lahendus. Kui $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ on peateljel aasuva punkti kohavektor, siis see on valemis (2.50) esineva maatriksi omavektor, st

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

kus kordaja λ on omaväärtus. Omaväärtusete leidmiseks tuleb lahendada karakteristlik võrrand

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Omaväärtusele $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ vastava omavektori komponendid rahuldavad võrrandit:

$$3x_1 + x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}\, x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, x_1,$$

millest saame esimese omavektori

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{bmatrix}.$$

Omaväärtusele $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ vastava omavektori komponendid rahuldavad võrrandit:

$$3x_1 + x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}\, x_1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, x_1,$$

millest saame teise omavektori

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{5}+1 \end{bmatrix}.$$

Vastus: Omavektoritele $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ vastavate peatelgede võrrandid on vastavalt

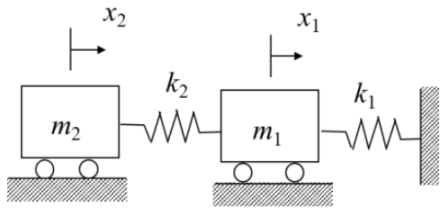
$$(\sqrt{5}-1)x_1 - 2x_2 = 0 \quad \text{ja} \quad (\sqrt{5}+1)x_1 + 2x_2 = 0.$$

Ül 2.59. Joonisel 2.27 on esitatud kahe vedru ja kahe kehaga süsteem, mille liikumisvõrrand maatriskkujul on

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.51}$$

kus m_i on süsteemi kuuluvate kehade massid, x_i ja $\ddot{x}_i$ vastavalt nende siirded ja kiirendused ning k_1 ja k_2 on süsteemi kuuluvate vedrude jäikused.

Leida süsteemi omasagedused ja võnkemoodid (võnkekujud), kui $m_1 = 9\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, $k_1 = 24\,\mathrm{N/m}$, $k_2 = 3\,\mathrm{N/m}$.



Joonis 2.27: Vedrusüsteem.

Lahendus. Ülesande tingimustele vastav liikumisvõrrandite süsteem (2.51) on

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Otsime selle lahendit kujul

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}\,\mathrm{e}^{\,i\,\omega\,t}, \quad \text{kus} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Asandades liikumisvõrrandis kiirendused, leiame, et

$$\begin{bmatrix} 27 - 9\lambda & -3 \\ -3 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{kus} \quad \lambda = \omega^2.$$

Sellele lineaarsel võrrandisüsteemil leidub mittetriviaalne lahend parajasti siis, kui süsteemimaatriksi determinant võrdub nulliga, so

$$\begin{vmatrix} 27 - 9\lambda & -3 \\ -3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Leime parameetri λ väärtused, mille korral see determinat on null. Seega

$$(27-9\lambda)(3-\lambda)-9=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2-6\lambda+8=0,$$

millest saame, et $\lambda_1=2$ ja $\lambda_2=4$. Võrdusest $\lambda=\omega^2$ saame, et otsitavad omasagedused on

$$\omega_1=\sqrt{2} \quad \text{ja} \quad \omega_2=4.$$

Võnkemoodide (võnkekujude) määramiseks leiame süsteemi omavektorid. Selleks leiame siirete suhted $\dfrac{x_1}{x_2}$ mõlema omaväärtuse korral.

Omaväärtuse $\lambda_1=2$ korral

$$\begin{bmatrix} 27-9\cdot 2 & -3 \\ -3 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ehk} \quad \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

millest leiame omavektori

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_1}{x_2}=\frac{1}{3}.$$

Omaväärtuse $\lambda_1=24$ korral

$$\begin{bmatrix} 27-9\cdot 4 & -3 \\ -3 & 3-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ehk} \quad \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

millest leiame omavektori

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{3}.$$

Vastus: Omasagedussel $\omega_1=\sqrt{2}$ liiguvad kehad samas suunas, sest siirete suhe on positiivne. Omasagedusel $\omega_2=4$, aga vastassuunas. Mõlemal juhul on teise keha siire esimese keha omast kolm korda väiksem.

Ül 2.60. Vedrusüsteemi kirjeldab lineaarste konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite süsteem (vt Ül **2.59**)

$$\begin{bmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ehk

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Selle diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendamiseks kasutage maatriksi omaväärtusi ja omavektoreid.

Lahendus. Defineerime uued muutujad

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_1, \quad u_3 = \dot{x_1}, \quad u_4 = \dot{x_2},$$

siis saame võrrandid esitada süsteemina

$$\begin{cases} \dot{u_1} = u_3 \\ \dot{u_2} = u_4 \\ \dot{u_3} = -\frac{k_1+k_2}{m_1}u_1 + \frac{k_2}{m_1}u_2 \\ \dot{u_4} = \frac{k_2}{m_2}u_1 - \frac{k_2}{m_2}u_2 \end{cases}$$

ehk maatrikskujul $\dot{U} = AU$, kus

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{u_1} \\ \dot{u_2} \\ \dot{u_3} \\ \dot{u_4} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lahendame maatriksi A omaväärtusülesande. Leiame $A - \lambda I$ determinandi

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0-\lambda & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +\lambda I \\ +\lambda II \end{matrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} - \lambda^2 & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} - \lambda^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} - \lambda^2 & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} - \lambda^2 \end{vmatrix} = (-\frac{k_1+k_2}{m_1} - \lambda^2)(-\frac{k_2}{m_2} - \lambda^2) - \frac{k_2}{m_1} \cdot \frac{k_2}{m_2}$$

Omaväärtuste korral peab deteminandi väärtus võrduma nulliga. Edasi lahendamiseks oleks lihtsam teha konkreetsete arvudega. Kui asendada sisse kordajate väärtused $k_1 = 24$, $k_2 = 3$, $m_1 = 9$, $m_2 = 1$, siis tuleb lahendada võrrand

$$(-\frac{24+3}{9} - \lambda^2)(-\frac{3}{1} - \lambda^2) - \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{1} = 0$$

ehk

$$(-3 - \lambda^2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -3 - \lambda^2 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -3 \mp 1$$

Seega $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, $\lambda_3 = \sqrt{2}i$, $\lambda_4 = -\sqrt{2}i$
Leiame igale omaväärtusele vastavad omavektorid. Iga λ korral tuleb lahendada võrrandisüsteem $(A - \lambda I)U = 0$.
$\lambda_{1,2} = \pm 2i$ korral teisendame kordajate maatriksit Gaussi meetodil

$$\begin{bmatrix} \mp 2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp 2i & 0 & 1 \\ -3 & \frac{1}{3} & \mp 2i & 0 \\ 3 & -3 & 0 & \mp 2i \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \pm 2i\, I \\ \pm 2i\, II \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \mp 2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp 2i & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \pm 2i\, III \\ \\ \\ -3\, III \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \pm\frac{2}{3}i & 1 & 0 \\ 0 & \mp 2i & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pm\frac{2}{3}iu_2 + u_3 = 0 \\ \mp 2iu_2 + u_4 = 0 \\ u_1 + \frac{1}{3}u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -1C \\ u_2 = 3C \\ u_3 = \mp 2iC \\ u_4 = \pm 6iC \end{cases} \Rightarrow U_1 = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2i \\ 6i \end{bmatrix}, \quad U_2 = C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2i \\ -6i \end{bmatrix}$$

Analoogiliselt $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$ korral:

$$\begin{bmatrix} \mp i\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp i\sqrt{2} & 0 & 1 \\ -3 & \frac{1}{3} & \mp i\sqrt{2} & 0 \\ 3 & -3 & 0 & \mp i\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \pm i\sqrt{2}\, I \\ \pm i\sqrt{2}\, II \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \mp i\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp i\sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mp i\sqrt{2}\, III \\ \\ \\ +3\, III \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mp\frac{\sqrt{2}}{3}i & 1 & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{2}i & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mp\frac{\sqrt{2}}{3}iu_2 + u_3 = 0 \\ \mp\sqrt{2}iu_2 + u_4 = 0 \\ -u_1 + \frac{1}{3}u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1C \\ u_2 = 3C \\ u_3 = \pm\sqrt{2}iC \\ u_4 = \pm 3\sqrt{2}iC \end{cases}$$

$$U_3 = C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{2}i \\ 3\sqrt{2}i \end{bmatrix}, \quad U_4 = C_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\sqrt{2}i \\ -3\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

Leitud omaväärtuste ja omavektorite abil saame konstrueerida diferentsiaalvõrrandi üldlahendi. Diferentsiaalvõrrandi üldlahend avaldub kujul

$$U = e^{\lambda_1 t}U_1 + e^{\lambda_2 t}U_2 + e^{\lambda_3 t}U_3 + e^{\lambda_4 t}U_4$$

ehk

$$U = C_1 e^{2it} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2i \\ 6i \end{bmatrix} + C_2 e^{-2it} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2i \\ -6i \end{bmatrix} + C_3 e^{\sqrt{2}it} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{2}i \\ 3\sqrt{2}i \end{bmatrix} + C_4 e^{-\sqrt{2}it} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\sqrt{2}i \\ -3\sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

Otsitavad x_1 ja x_2 on saadud vektori U kaks esimest komponenti.

$$\begin{cases} x_1 = -C_1 e^{2it} - C_2 e^{-2it} + C_3 e^{\sqrt{2}it} + C_4 e^{-\sqrt{2}it}, \\ x_2 = 3C_1 e^{2it} + 3C_2 e^{-2it} + 3C_3 e^{\sqrt{2}it} + 3C_4 e^{-\sqrt{2}it} \end{cases}$$

Kasutades Euleri valemit $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ning omadusi, et $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ ning $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ saab siin teisendada ka reaalmuutuja funktsiooniks:

$$C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it} = C_1(\cos 2t + i\sin 2t) + C_2(\cos(-2t) + i\sin(-2t)) =$$

$$C_1(\cos 2t + i\sin 2t) + C_2(\cos 2t - i\sin 2t) = (C_1 + C_2)\cos 2t + i(C_1 - C_2)\sin 2t$$

Kuna C_1 ja C_2 võivad olla suvalised konstandid, siis valime $C_5 = C_1 + C_2$ ja $C_6 = i(C_1 - C_2)$. Siis saame esitada

$$C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it} = C_5 \cos 2t + C_6 \sin 2t$$

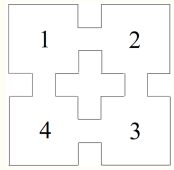
ja analoogiliselt ka

$$C_3 e^{\sqrt{2}it} + C_4 e^{-\sqrt{2}it} = C_7 \cos\sqrt{2}t + C_8 \sin\sqrt{2}t$$

Vastus: Diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldlahend kirjutatav kujul

$$\begin{cases} x_1 = -C_5 \cos 2t - C_6 \sin 2t + C_7 \cos\sqrt{2}t + C_8 \sin\sqrt{2}t, \\ x_2 = 3C_5 \cos 2t + 3C_6 \sin 2t + 3C_7 \cos\sqrt{2}t + 3C_8 \sin\sqrt{2}t \end{cases}$$

Ül 2.61. Hiir asub labürindis, mis koosneb neljast kambrist. Algselt on hiir kambris nr.1. Igal sammul võib hiir jääda paigale või liikuda ühte kõrvalkambrisse. Hiir valib liikumissuuna juhuslikult. Loeme, et võrdse tõenäosusega võib ta valida ükskõik millise võimaluse. Kambrist nr.1 võib ta lisaks paigalejäämisele liikuda kas kambrisse 2 või 4, kambrist nr.2 võib liikuda kambrisse nr.1 või nr.3 jne.



Kasutades omaväärtusülesannet, näidata, et süsteemil on tasakaaluolek (vt ka ülesannet 2.9).

Lahendus. Süsteemil on lõplik arv olekuid. Süsteem peab olema täpselt ühes nendest olekutest. On teada üleminekute tõenäosused ühest olekust teise. Üleminekumaatriks peab olema selline, et iga veeru elementide summa võrdub ühega ning kõik elemendid on nulli ja ühe vahel.

Olgu üleminekumaatriks $\mathbf{A}$ ja seisundile i vastav olekuvektor $\mathbf{X}_i$, siis üleminekul seisundisse $i+1$ on olekuvektor

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_i$$

Olekuvektorile $\mathbf{X}$ vastavat seisundit, mille korral

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

nimetatakse tasakaaluolekuks.

Üleminekumaatriks on

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad \text{ja algolek} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \frac{4\lambda^3}{3} + \frac{2\lambda^2}{9} + \frac{4\lambda}{27} - \frac{1}{27} = 0$$

$$(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{1}{3}\right)^2\left(\lambda + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{-n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3^{-n}}{2} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2.8.1. Pingetensor ja omaväärtusülesanne

Tasandpingeolukorras mõjuvad kõik nullist erinevad pinged ühes tasandis. Pinget võib käsitleda jõuna, mis on jaotatud pinnaühikule.

Normaalpinge σ_x mõjub pinnal, mille pinnanormaal on orienteeritud x-telje suunas ja ka pinge ise mõjub x-telje suunas. Sarnaselt mõjub normaalpinge σ_y pinnal, mille pinnanormaal on orienteeritud y-telje suunas ja ka pinge ise mõjub y-telje suunas.

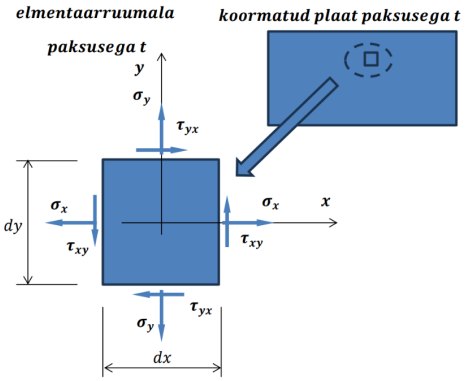
Normalpingete tõttu nihkuvad koormatavad elementaarruumala vastastikused pinnad kas üksteisest kaugemale tõmbepingete korral või lähemale survepingete korral.

Lõikepinge τ_{xy} mõjub pinnal, mille pinnanormaal on orienteeritud x-telje suunas ja pinge ise mõjub y-telje suunas (pinna puutuja sihis). Analoogselt mõjub lõikepinge τ_{yx} pinnal, mille pinnanormaal on orienteeritud y-telje suunas, ja pinge ise mõjub x-telje suunas.

Lõikepinged deformeerivad elementaarpinda nii, et paralleelsed vastaspinnad nihkuvad teineteise suhtes pindade puutujate sihis. Pingeid võib vaadelda, ka näiteks koordinaadistikus, mis on pööratud esialgse koordinaatsüsteemi suhtes. Sellisel juhul pingete väärtused muutuvad. Teatud pöörde korral muutuvad pinged nii, et normaalpinged saavad ekstremaalse väärtuse ja lõikepinged kaovad. Selliseid pingeid nimetatakse **peapingeteks**. Üks normaalpinge saavutab maksimaalse väärtuse ja teine normaalpinge saavutab minimaalse väärtuse.

Habraste materjalide puhul on tavaliselt suurim peapinge see, mis võib põhjustada materjali purunemist.

Seega on keerulise pingeolukorra puhul oluline määrata peapingete väärtused, mis võimaldavad habraste materjalide puhul määrata materjali purunemise tingimuse.



Joonis 2.28: Pingetensori komponendid.

Ül 2.62. Vaatleme tasandpingeolukorda klaasplaadi ühes konkreetses punktis. Normaalpinge x-telje sihis on 32 MPa. Normaalpinge y-telje sihis on 10 MPa. Lõikepinge väärtuseks 25 MPa. Klaasmaterjali kohta on teada, et puhta tõmbe korral puruneb materjal 40 MPa korral.

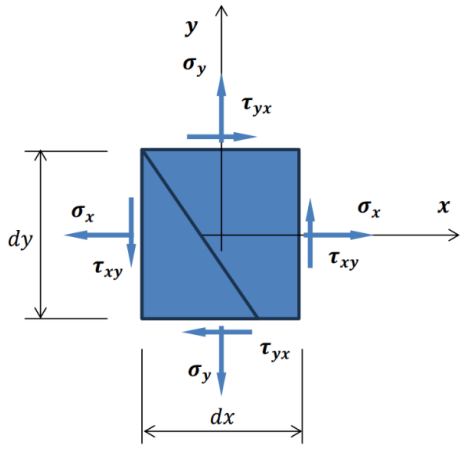
Vaja oleks hinnata pingeolukorda ja otsustada, kas materjal vaadeldavas punktis puruneb või mitte. Terves klaasis esineb tavaliselt ka pindmikropragusid, defekte ja kriimustusi. Tavaliselt on hapra materjali korral prao arenemise esialgne suund tingitud peapingete sihist. Hapras materjalis tekivad esialgsed praod suunas, mis on risti suurima peapinge sihiga, sest selliselt on võimalik pragu kõige lihtsamini laiemaks vedada.

Ülesandeks on määrata antud plaadi punktis materjalis tekkivad peapinged ja peapingete sihid ning hinnata materjali purunemise võimalikkust.

Lahendus. Tasandpingeolukorras võib pingetensori esitada kujul 2×2 maatriksina

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_x \end{bmatrix}.$$

Joonisel 2.29 on kujutatud elmentaarruumala, millest on lõigatud välja kolmnurkne osa. Telgedega x ja y paraleelsetel külgedel mõjuvad pinged σ_x, σ_y ja τ_{xy}.
Lõikepinnal tekib kontaktjõud, mida võib nimetada ka pingevektoriks $\mathbf{t}_n$.
Pingevektoriks $\mathbf{t}_n$ Kirjutame välja horisontaalse ja vertikaalse tasakaalu võrrandid



Joonis 2.29: Kolmnurkne väljalõige.

kasutades pingetest tekkivaid jõude. Saame seosed

$$t_{nx} \cdot l \cdot t - \sigma_x \cdot l_y \cdot t - \tau_{yx} \cdot l_x \cdot t = 0$$

ja

$$t_{ny} \cdot l \cdot t - \sigma_y \cdot l_x \cdot t - \tau_{xy} \cdot l_y \cdot t = 0,$$

kus t_{nx} ja t_{nx} on pingevektori $\mathbf{t}_n$ komponendid x- ja y-telje sihis ning $l_x,\ l_y,\ l$ on vastavalt elmentaarruumala külgede pikkused. Lõigatud pinna pinnanormaali komponendid saab esitada nurga α kaudu. Arvestades, et vektori $\mathbf{n}$ pikkus on 2, saame

$$\sin\alpha = \frac{n_x}{|\mathbf{n}|} = n_x,$$
$$\cos\alpha = \frac{n_y}{|\mathbf{n}|} = n_y.$$

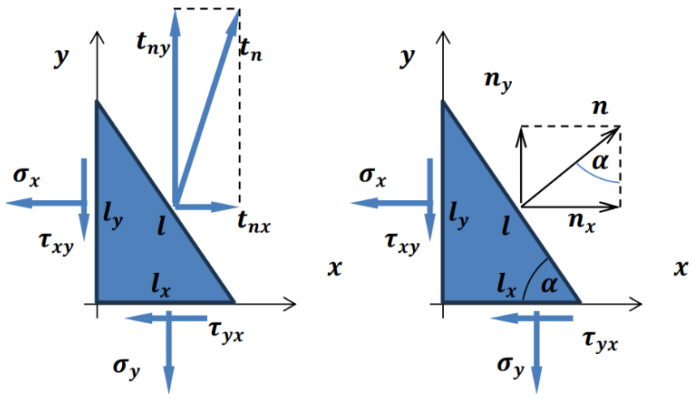
Sarnased seosed saame elmentaarruumala küljepikkuste suhtes ehk

$$\sin\alpha = \frac{l_y}{l} = n_x,$$
$$\cos\alpha = \frac{l_x}{l} = n_y.$$

Nüüd on võimalik tasakaaluvõrrandid kirjutada maatrikskujul järgnevalt

$$\begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_y}{l} \\ \frac{l_x}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}.$$

Meid huvitab selline pind, mille puhul lõikepinged kaoksid. See tähendab, et lõikepinnal olev pingevektor $\mathbf{t}_n$ peab olema paralleelne pinnanormaaliga $\mathbf{n}$. Tähistame selliseks pinna normaaliks olevat vektorit $\mathbf{n}' = \left(n'_x,\, n'_y\right)$.



Joonis 2.30: Väljalõike pingevektor.

Seetõttu saame lõikepinnal pinnanormaaliga paralleelse pingevektori esitada skalaari σ_p ja pinnanormaali korrutisena $\sigma_p \mathbf{n}'$.

Arvutades pingetensori abil välja pingevektori pinnal, mille pinnanormaal on $\mathbf{n}'$ ja võrdsustades selle skalaari σ_p ning pinnanormaali $\mathbf{n}'$ korrutisega, saame järgneva seose

$$\begin{bmatrix} t_{n'x} \\ t_{n'y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \sigma_p \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix}$$

ehk seda avaldist pisut ümber kirjutades saame

$$\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} - \sigma_p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

See on lineaarne homogeenne võrrandisüsteem vektori $\mathbf{n}'$ koordinaatide leidimiseks. Sellel võrrandisüsteemil on mittetriviaalne, so nullvektorist erinev lahend parajasti siis kui süsteemimaatriksi determinat

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p \end{vmatrix} = 0.$$

Kuna pingetensor on sümmeetriline, so $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, siis skalaari σ_p leidmiseks saame ruutvõrrandi

$$\sigma_p^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma_p + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0.$$

Selle ruutbõrrandi lahendid on pingetensori omaväärtused ehk peapinged

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}.$$

Arvutame nüüd välja ülesandes kirjeldatud olukorrale vastavad peapinged

$$\sigma_{p1} = \frac{32-10}{2} + \frac{\sqrt{(32+10)^2+4\cdot 25^2}}{2} = \ 43.65\,\text{MPa},$$
$$\sigma_{p2} = \frac{32-10}{2} - \frac{\sqrt{(32+10)^2+4\cdot 25^2}}{2} = -21.65\,\text{MPa}.$$

Seega saab järeldada, et klaasmaterjal mille tõmbetugevus on 40 MPa puruneb antud pingete korral.

Leiame peapingete sihid ehk pingetensori omavektorid.

Otsime omaväärtusele σ_{p1} vastavat omavektorit kujul $\mathbf{v} = (1,\, x)$, seega

$$\begin{bmatrix} 32-43.65 & 25 \\ 25 & -10-43.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nende maatriksite korrutamisel saame koordinaadi x leidmiseks kaks samaväärset lineaarset võrrandit. Näiteks maatriksi teise rea korrutamisel vektoriga $\mathbf{v}$ saame võrrandi

$$25 - x(10+43.65) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.466.$$

Leiame selle omavektori suunalise ühikvektori $\mathbf{n}'$:

$$\begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1^2+0.466^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.466 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.906 \\ 0.422 \end{bmatrix}$$

Kordame sama tegevust teise omaväärtuse σ_{p2} korral:

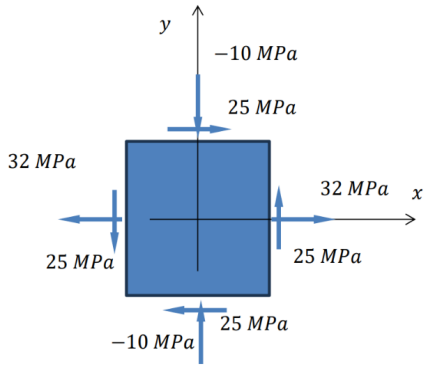
$$\begin{bmatrix} 32+21.65 & 25 \\ 25 & -10+21.65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$25 - x(10-21.65) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2.146.$$

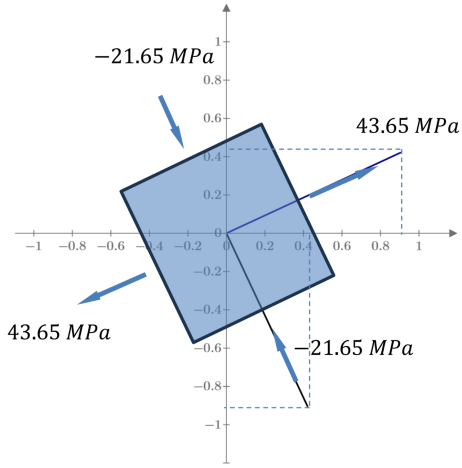
Teise omavektori suunaline ühikvektor $\mathbf{n}'$ on

$$\begin{bmatrix} n'_x \\ n'_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2.146^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2.146 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.422 \\ -0.906 \end{bmatrix}.$$

Välja arvutatud peapinged ja peapingete suunad on kujutatud joonisel 2.32. Klaasis tekkivad praod on tõenäoliselt sihis, mis on risti suurima peapinge sihiga juhul, kui suurim peapinge on tõmbepinge.



Joonis 2.31: Klaasplaadi tasandipinged.



Joonis 2.32: Peapingete vektorid.

Ül 2.63. Keha punktis on antud pingetensor

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix}.$$

Leida peapinged σ_1, σ_2 ja σ_3 kui pingetensori omaväärtused, mis rahuldavad karakteristlikku võrrandid $\det(S - \sigma I) = 0$. Arvutada pingete peasuunad $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ ja $\vec{N}_3$ kui pingetensori normeeritud omavektorid. Kontrollida omavektorite ortogonaalsust.

Lahendus. Esitame peapingete karakteristliku võrrandi determinandi:

$$\begin{vmatrix} -1-\sigma & -16 & -2 \\ -16 & 5-\sigma & -14 \\ -2 & -14 & 14-\sigma \end{vmatrix}.$$

See annab meile kuupvõrrandi

$$\sigma^3 - 18\sigma^2 - 405\sigma + 4374 = 0,$$

mille lahenditeks saame kahanevas järjekorras peapinged

$$\sigma_1 = 27, \ \ \sigma_2 = 9, \ \ \sigma_3 = -18.$$

Esimene omavektor $\vec{N}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ rahuldab võrrandit $(S - \sigma_1 I) \cdot \vec{N}_1 = 0$. Lahendame süsteemi

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & -16 & -2 \\ -16 & 5 & -14 \\ -2 & -14 & 14 \end{bmatrix} - 27 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -28 & -16 & -2 \\ -16 & -22 & -14 \\ -2 & -14 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Saame lahendiks $\vec{N}_1 = [1, -2, 2]^T$ ja normeerides $\vec{N}_1 = [\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]^T$. Analoogiliselt leiame ülejäänud normeeritud omavektorid $\vec{N}_2 = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^T$ ja $\vec{N}_3 = [\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}]^T$. Kontrollime ortogonaalsust

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0$$

$$\vec{N}_2 \cdot \vec{N}_3 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Kõik vektorite skalaarkorrutsed on nullid ja seege vektorid on ortogonaalsed.

Indeks

YMX0230, 5
- Alar Leibak, 5, 6, 8, 11, 14, 30, 33–35, 44
- Aleksander Klauson, 19–21, 43, 65–67, 121
- Andres Braunbrück, 102, 103, 107, 108, 110, 129, 131, 132
- Hendrik Naar, 78, 114, 126, 141
- Jaan Janno, 10, 23, 26, 47–49, 68, 77, 119, 120
- Jüri Kurvits, 15, 16, 27, 28, 58–62, 64, 97, 138
- Liivi Kluge, 83
- Madis Ratassepp, 12, 13, 18, 22, 24, 27, 37, 47, 50, 51, 75, 112, 117, 123, 124
- Mati Väljas, 26, 30, 31, 38–40, 42, 53, 54, 70, 73, 85, 87, 90, 99, 100, 134–136

YMX0243, 149
- Alar Leibak, 153, 166, 178, 206–208, 251, 253
- Aleksander Klauson, 149, 161, 176, 228, 238, 240, 256
- Andres Braunbrück, 201, 203, 233, 235
- Hendrik Naar, 189, 223, 263
- Jaan Janno, 151, 155, 173, 196, 198, 208, 245, 255
- Liivi Kluge, 150, 157, 159, 160, 162–164, 171, 179–183, 186, 187, 257
- Madis Ratassepp, 152, 172, 212, 215, 229, 250, 268
- Mati Väljas, 154, 174, 216–218, 220, 221, 241, 247, 260